# III Existence et/ou calcul de limites

## 1 Opérations algébriques : résultats analogues à ceux des suites pour les limites de $f+g$, $f\times g$ ...

## 2 Composition de limites

**Théorème 1 : Fonctions et suites**

Pour $a,\ell$ finis ou non, il y a équivalence entre :

*i)* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ *ii)*

**Exemple 1** SF 2 — Déterminer les limites lorsque $n\to+\infty$ de : **a)** $e^{\frac{1}{n!}}$ **b)** $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ $(a\in\mathbb{R}^*)$.

**SF 3 : Montrer que $f$ n'admet pas de limite en $a$**

On peut construire deux suites $u,v$ telles que : • $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

**Exemple 2** — Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

**Théorème 2 : Fonctions et fonctions**

Soient $f: I\to\mathbb{R}$ et soit $g: J\to\mathbb{R}$. On suppose $f$ à valeurs dans $J$.

**Exercice 1** — Démontrer ce théorème en utilisant les suites.

**Exemple 3** SF 2 — Déterminer les limites de : **a)** $e^{-\frac{1}{x^2}}$ lorsque $x\to 0$. **b)** $\ln x\times\ln(\ln x)$ lorsque $x\to 1^+$.

## 3 Limites et inégalités larges

**Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges**

Soient $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$. Si : *i)* *ii)*

Alors :

## 4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

**Théorème 4 : Limite par encadrement**

Soit $\ell\in\mathbb{R}$. Si : *i)* *ii)*

Alors :

**Théorème 5 : majoration / minoration**

On suppose qu'au voisinage de $a$, $f(x)\leq g(x)$.

- 
- 

**Exemple 4** SF 2 — Existence et valeur de la limite en $+\infty$ de $x\mapsto e^x+\sin(x\ln x)$.

**Théorème 6 : Théorème de la limite monotone (cas croissante)**

On suppose que $f$ est croissante sur $]a,b[$ :

| Limite en $b^-$ : | Limite en $a^+$ : |
|---|---|
| • <br> • | • <br> • |

- **Conséquence.** En tout $c\in\,]a,b[$, $f$ possède des demi limites finies et : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$
- **Remarque.** On dispose d'énoncés analogues lorsque $f$ est décroissante.

**Exemple 5** SF 4 SF 2 — On suppose $f$ convexe sur $]a,b[$. Soit $c\in\,]a,b[$. Montrer que $f$ est continue en $c$.

**Exemple 6** SF 2 — Montrer que $F: x\mapsto\int_1^x e^{-t^2}\,dt$ possède une limite finie en $+\infty$.