1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

- **Illustration.**

- **Notation.** On écrit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- **Explication.**

Exercice 1 — **1.** Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ (où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$) alors : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.
2. Démontrer le théorème d'encadrement.

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Dans le cas où u est convergente, le réel ℓ de la définition est unique, appelé limite de u et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- Dans le cas contraire, on dit que u est *divergente*.

Exercice 2 ♥ — Démontrer l'unicité de la limite en raisonnant par l'absurde.

Théorème 2

Toute suite convergente est :

Attention La réciproque est fausse par exemple :

Exercice 3 — **1.** ♥ Démontrer le théorème précédent.
2. ♥ Démontrer que si u est bornée et si v converge vers 0, alors uv converge vers 0.
3. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ (où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$) alors : $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$.

Théorème 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors :

Exercice 4 — **1.** ♥ Démontrer ce théorème : faire un dessin puis revenir à la définition de la limite.
2. En déduire une démonstration du théorème de passage aux limites dans les inégalités larges.

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

- **Explication.** $u_n \to +\infty$ si :

Exercice 5 — **1.** Démontrer le théorème de minoration.
2. ♥ Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ alors : $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemple 1 ***Attention*** — Démontrer qu'une suite qui n'est pas bornée ne tend pas forcément vers $\pm\infty$.

4 Tableau récapitulatif

	Suite convergente	Suite divergente	
Limite ?			

Exercice 6 — On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$