I Lois de composition interne

- **Cadre.** E est un ensemble non vide.

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

Définition 1

Une *loi de composition interne sur E* est :

Exemple 1 — Donner une loi de composition interne sur : **a)** $\mathbb{N}$ **b)** $\mathbb{Z}$ **c)** $\mathscr{P}(E)$ **d)** $\mathscr{F}(E,E)$

- **Notation.** Une loi de composition interne se note sous la forme d'une opération. Dans la suite on considère une loi de composition interne « abstraite » sur E, que l'on note $\star$.

Définition 2

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

• Commutative si : • Associative si :

Exemple 2 — Les lois de composition interne suivantes sont-elles associatives ? commutatives ?
a) L'addition sur $\mathbb{N}$ **b)** La soustraction sur $\mathbb{Z}$ **c)** La réunion sur $\mathscr{P}(E)$ **d)** La composition sur $\mathscr{F}(E,E)$

- **Notation.** Si $\star$ est associative l'élément $\underbrace{x\star x\star\cdots\star x}_{n\text{ fois}}$ est noté : • •

Définition 3

Soit $(E,\star)$ et $(F,\cdot)$ deux ensembles munis de lois de composition interne. On définit une loi de composition interne $\times$ sur (E,F) en posant, pour tous $x,x'\in E$ et $y,y'\in F$: $(x,y)\times(x',y') \underset{\text{déf.}}{=}$

Exercice 1 — Montrer que si $\star$ et $\cdot$ sont associatives, alors la loi produit $\times$ l'est aussi.

2 Propriétés des éléments

- **Cadre.** $\star$ est une loi de composition interne sur E.

Définition 4

On dit que $e\in E$ est un élément neutre pour $\star$ si :

Exemple 3 — Donner l'élément neutre : **a)** $(\mathbb{R},+)$ **b)** $(\mathbb{R},\times)$ **c)** $(\mathscr{P}(E),\cap)$ **d)** $(\mathscr{P}(E),\cup)$ **e)** $(\mathscr{F}(E,E),\circ)$

Exercice 2 *Unicité de l'élément neutre* — Montrer que s'il existe un élément neutre pour $\star$, alors il est unique.

- **Remarque.** Par convention : $x^0 =$

Définition 5

On suppose que $\star$ possède un élément neutre e. Un élément x de E est dit inversible pour $\star$ si

Exemple 4 — Donner les éléments inversibles : **a)** $(\mathbb{Z},+)$ **b)** $(\mathbb{N},+)$ **c)** $(\mathbb{R},\times)$ **d)** $(\mathbb{Z},\times)$ **e)** $(\mathscr{F}(E,E),\circ)$

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x,y\in E$, inversibles et $n\in\mathbb{N}$.

i) *ii)* x^{-1} est inversible et :

iii) $x\star y$ est inversible et : *iv)* x^n est inversible et :

Exercice 3 — Démontrer les points *i)* et *iii)* du théorème.

3 Permutations

Définition 6

Une *permutation* de E est :

- **Notation.** L'ensemble des permutations de E est noté S_E.

Exercice 4 — Montrer que la composition est une loi de composition interne sur S_E

Exemple 5 — On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soit $a\in E$, inversible.
Montrer que les applications $\gamma_a : x\mapsto a\star x$ et $\delta_a : x\mapsto x\star a$ sont des permutations de E.