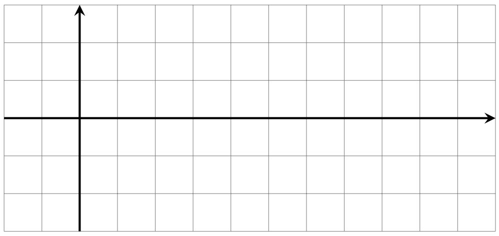
V Interpolation de Lagrange

- **Données.**

• $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. • $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques

- **Problème de l'interpolation.**

Trouver un polynôme dont la courbe passe par les points (x_k, y_k) *i.e.* trouver $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(x_1) = y_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad P(x_n) = y_n$.



Définition 1

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par :

Ce polynôme vérifie : • •

Les poynômes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont appelés polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exemple 1 — Expliciter les polynômes L_1 et L_3 dans le cas où $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = 4$.

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

ce polynôme est donné par :

Exercice 1 SF 8 *Ex. 87.1, banque INP* — Démontrer le théorème

Exemple 2 —

1. Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $P(1) = 1, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = -1 \quad$ et $\quad P(4) = 0$.
2. Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $P(1) = 1, \quad P(2) = 4, \quad P(3) = 9 \quad$ et $\quad P(4) = 16$.

Exemple 3 SF 8 *cf. Ex. 87.3, banque INP* —

Simplifier : **a)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ **b)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$ **c)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p L_i$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$.