III Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

Définition 1

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

-
-

1 Intégration par parties

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

- **Remarque.** L'hypothèse : « u et v de classe $\mathscr{C}^1$ » assure que les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont bien définies.

Exercice 1 — Démontrer le théorème

SF 9 : Effectuer une intégration par parties

Exemple 1 — Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos t \,\mathrm{d}t$.

Exemple 2 — **a)** Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ **b)** Déterminer les primitives de Arctan sur $\mathbb{R}$

2 Changement de variable

Le théorème

Théorème 2 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, à valeurs dans I.

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

La pratique.

La formule peut être utilisée dans les deux sens pour calculer une intégrale I donnée.

- **Utilisation « de gauche à droite ».**

Exemple 3 *SF 10* — Calculer $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t+t\ln t}\,\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $x = \ln t$.

Calculer $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \varphi(t)$

- On calcule $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ puis on fait apparaître $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ dans l'intégrale.
- On effectue trois remplacements :
  1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
  2. on remplace $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$;
  3. on remplace les bornes a et b en *calculant* leurs images $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

- **Utilisation « de droite à gauche ».**

Exemple 4 *SF 11* — Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $x = \sin t$.

Calculer $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \varphi(t)$

- On calcule $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- On effectue trois remplacements :
  1. on remplace $f(x)$ par $f(\varphi(t))$;
  2. on remplace $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;
  3. on remplace les bornes α et β en *cherchant* a et b tels que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.

Exemple 5 — Calculer : **a)** $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ **b)** $I_2 = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$
On utilisera les changements de variables respectifs $x = e^t$ et $t = \frac{1}{s}$.

Exemple 6 — Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \cos(2\ln t)$ à l'aide du changement de variable $t = e^u$.

Exemple 7 — Calculer une primitive sur $]0,\pi[$ de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sin\theta}$

a) à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$.
b) à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$ – ♥♥

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$