4 Généralisation au cas de n variables aléatoires

- **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini • $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω ($n \geq 2$).

Définition 1

Les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont dites indépendantes si pour toutes parties $A_1 \subset X_1(\Omega),\dots,A_n \subset X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 \in A_1\},\dots,\{X_n \in A_n\}$ sont indépendants.

C'est équivalent à : $\boxed{\forall x_1 \in X_1(\Omega),\dots,\forall x_n \in X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)\times\cdots\times P(X_n = x_n)}$

- **Rappel.** On rappelle que l'on note : $P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n)$ au lieu de $P(\{X_1 = x_1\}\cap\ldots\cap\{X_n = x_n\})$.

Démonstration de l'équivalence.

•Supposons $X_1,\dots,X_n$ indépendantes.
Soit $x_1 \in X_1(\Omega),\dots,x_n \in X_n(\Omega)$. En appliquant la définition de l'indépendance avec $A_1 = \{x_1\},\dots,A_n = \{x_n\}$:

$$P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = P\Big(\{X_1 \in A_1\}\cap\ldots\cap\{X_n \in A_n\}\Big) \underset{\text{indép.}}{=} P(X_1 \in A_1)\ldots P(X_n \in A_n) = P(X_1 = x_1)\ldots P(X_n = x_n)$$

•Réciproquement, supposons : $\forall x_1 \in X_1(\Omega),\dots,\forall x_n \in X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)\ldots P(X_n = x_n)$
Montrons que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes.

- Soient $B_1 \subset X_1(\Omega),\dots,B_n \in X(\Omega)$. Montrons d'abord[1] : $P\Big(\{X_1 \in B_1\}\cap\ldots\cap\{X_n \in B_n\}\Big) = P(X_1 \in B_1)\ldots P(X_n \in B_n)$

  En posant $B = B_1\times\cdots\times B_n$: $\{X_1 \in B_1\}\cap\ldots\cap\{X_n \in B_n\} = \bigcup\limits_{(x_1,\dots,x_n)\in B} \{X_1 = x_1\}\cap\ldots\cap\{X_n = x_n\}$

  La réunion étant incompatible :

$$P\Big(\{X_1 \in B_1\}\cap\ldots\cap\{X_n \in B_n\}\Big) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in B} P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in B} P(X_1 = x_1)\ldots P(X_n = x_n) = \overbrace{\Big(\sum_{x_1\in B_1} P(X_1 = x_1)\Big)}^{=P(X_1\in B_1)}\ldots\overbrace{\Big(\sum_{x_n\in B_n} P(X_n = x_n)\Big)}^{=P(X_n\in B_n)}$$

- Soient $A_1 \subset X_1(\Omega),\dots,A_n \subset X(\Omega)$. Montrons que $\{X_1 \in A_1\},\dots,\{X_n \in A_n\}$ sont indépendants.

  Soit donc une partie I de $[\![1,n]\!]$. Il s'agit de montrer : $P\Big(\bigcap\limits_{i\in I}\{X_i \in A_i\}\Big) = \prod\limits_{i\in I} P(X_i \in A_i)$.

  On se ramène au premier point en posant, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: • $B_i = A_i$ si $i \in I$ • $B_i = X_i(\Omega)$ si $i \notin I$

  Par construction : • $\{X_i \in B_i\} = \{X_i \in A_i\}$ si $i \in I$ • $\{X_i \in B_i\} = \Omega$ si $i \notin I$

  et le premier point permet d'écrire : $P\Big(\bigcap\limits_{i\in I}\{X_i \in A_i\}\Big) = P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{X_i \in B_i\}\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) = \prod\limits_{i\in I} P(X_i \in A_i)$

Théorème 1 : Lemme des coalitions

Supposons que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes. Alors $f(X_1,\dots,,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.

- **Remarque.** Posons $X = (X_1,\dots,X_m)$ et $Y = (X_m,\dots,X_n)$. Il s'agit de variables aléatoires à valeurs dans des ensembles produits. Par exemple, X est l'application $\omega \mapsto \big(X_1(\omega),\dots,X_m(\omega)\big)$ définie sur Ω et son image $X(\Omega)$ est un sous-ensemble de $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_m(\Omega)$. Il en va de même pour Y.
La fonction f est ici une fonction définie sur $X(\Omega)$ et g est définie sur $Y(\Omega)$.

Démonstration du théorème.

- Montrons d'abord que X et Y sont indépendantes. Soient $x = (x_1,\dots,x_m) \in X(\Omega)$ et $y = (x_{m+1},\dots,x_n) \in Y(\Omega)$.

$$P(X = x, Y = y) = P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) \underset{\text{indép.}}{=} \underbrace{P(X_1 = x_1)\times\cdots\times P(X_m = x_m)}_{\underset{\text{indép.}}{=} P(X_1=x_1,\dots,X_m=x_m)=P(X=x)}\times\underbrace{P(X_{m+1} = x_{m+1})\times\cdots\times P(X_n = x_n)}_{\underset{\text{indép.}}{=} P(X_{m+1}=x_{m+1},\dots,X_n=x_n)=P(Y=y)}$$

- Montrons maintenant que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Soient $u \in f(X)(\Omega)$ et $v \in g(Y)(\Omega)$.

  En posant : $A = f^{-1}\big(\{u\}\big)$ (ensemble des antécédents de u par f) et $B = g^{-1}\big(\{v\}\big)$

$$P\Big(\{f(X) = u\}\cap\{g(Y) = v\}\Big) = P\Big(\{X \in A\}\cap\{Y \in B\}\Big) \underset{\text{indép.}}{=} P(X \in A)P(Y \in B) = P\big(f(X) = u\big)P\big(g(Y) = v\big)$$

■ Complément (Hors programme) : Existence de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites

A l'image de ce qui a été vu dans le cas d'une variable aléatoire, on souhaite justifier les énoncés du type « soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de variables aléatoires **indépendantes** de loi ... » sans avoir à définir un espace probabilisé (Ω, P).
Détaillons le cas $n = 2$. Soient $(p_i)_{i\in E}$ et $(q_j)_{j\in F}$ des distributions de probabilité sur deux ensembles finis E et F, il s'agit de montrer qu'il existe un espace probabilisé (Ω, P) et des variables aléatoires X et Y sur Ω d'images respectives E et F vérifiant :
i) Pour tous $i \in E$ et $j \in F$: $P(X = i) = p_i$ et $P(Y = j) = q_j$. *ii)* X et Y sont indépendantes
Pour cela il suffit de constater que la famille $(p_i q_j)_{(i,j)\in E\times F}$ est une distribution de probabilité sur $E\times F$ car $\sum\limits_{i\in I, j\in J} p_i q_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} p_i\Big)\Big(\sum\limits_{j\in J} q_j\Big) = 1$.
Il existe donc un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire (X, Y) sur Ω telle que pour tout $(i, j) \in I\times J$: $P(X = i, Y = j) = p_i q_j$.
Les variables X et Y ainsi construites satisfont les deux conditions requises car :

i) Pour tout $i \in E$: $P(X = i) = \sum\limits_{j\in E} P(X = i, Y = j) = \sum\limits_{j\in E} p_i q_j = p_i$ et de même, pour tout $j \in F$: $P(Y = j) = q_j$.

ii) Pour tout $(i, j) \in E\times F$: $P(X = i, Y = j) = p_i q_j = P(X = i)P(Y = j)$

1. Ce n'est pas l'indépendance des événements $\{X_1 \in B_1\},\ldots\{X_n \in B_n\}$ qui exige $P\big(\bigcap\limits_{i\in I}\{X_i \in B_i\}\big) = \prod\limits_{i\in I} P(X_i \in B_i)$ **pour tout** $I \subset [\![1,n]\!]$.