I Variables aléatoires indépendantes, covariance

- **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini • X, Y et $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω.

1 Indépendance de variable aléatoires

Définition 1

X et Y sont indépendantes si pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants ce qui équivaut à :

- **Remarques:** Supposons X et Y indépendantes.
  - Pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$: $P_{\{X \in A\}}(Y \in B) = P(Y \in B)$
  - Si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et si g est définie sur $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
  - La définition se généralise au cas de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ avec $n \geq 2$ (voir complément)
- **Lemme des coalitions.** Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

Exemple 1 SF 1 ♥ — Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes des lois $\mathscr{B}(p_1), \ldots, \mathscr{B}(p_n)$. Trouver la loi de $Z = X_1 \ldots X_n$

Exemple 2 SF 11 — Soit $X \sim \mathscr{U}(\{-1, 1\})$ et $Y = \frac{1+X}{2}$. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Théorème 1

Si X et Y sont deux variables réelles (ou complexes) indépendantes :

2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Exercice 1 SF 5 ♥ — Soient X et S deux variables aléatoires définies sur Ω. On suppose que X et S sont indépendantes et que $X \sim \mathscr{B}(p)$ et $S \sim \mathscr{B}(n, p)$. Montrer que la variable aléatoire $T = S + X$ suit la loi $\mathscr{B}(n+1, p)$.

Théorème 2

On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** et toutes de loi $\mathscr{B}(p)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- **Démonstration.** Par récurrence sur n en utilisant le résultat de l'exercice 1 pour l'hérédité.
- **Interprétation.** Pour n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli, si X_i est l'indicateur de succès à la i-ième répétition alors S_n compte le nombre de succès lors des n répétitions.

Exemple 3 SF 5 ♥ — Soit X, Y indépendantes de loi $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$. Etablir : $P(X+Y=k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$

Exercice 2 — On suppose X et Y réelles. Montrer : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$

Théorème 3 : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes :

- **Remarque.** Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes :

Exercice 3 — Démontrer la formule donnant la variance de la loi $\mathscr{B}(n, p)$ en appliquant les deux résultats précédents à $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ où les X_i sont indépendantes et toutes de loi $\mathscr{B}(p)$.

3 Covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y

Définition 2

On appelle *covariance* de X et Y le réel

$\operatorname{cov}(X, Y) \underset{\text{déf.}}{=}$

On a aussi : $\operatorname{cov}(X, Y) =$

Exercice 4 — Démontrer l'égalité des deux expressions de la covariance.

- **Remarque.** Si X et Y sont indépendantes :
- **Remarque.** En particulier $\operatorname{cov}(X, X) =$

Théorème 4 : Variance d'une somme

- **Remarque.** Plus généralement : $V(X_1 + \cdots + X_n) =$