II Groupes

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$. On dit que $(G,\star)$ est un groupe si :

i) *ii)* *iii)*

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

Exemple 1 — Indiquer dans chacun des cas si les ensembles suivants sont des groupes
1. a) $(\mathbb{N},+)$ **b)** $(\mathbb{Z},+)$ **c)** $(\mathbb{Q},+)$ **d)** $(\mathbb{R},+)$ **e)** $(\mathbb{C},+)$
2. a) $(\mathbb{R},\times)$ **b)** $(\mathbb{R}^*,\times)$ **c)** $(\mathbb{C}^*,\times)$ **d)** $(\mathbb{Z}^*,\times)$
3. a) $(\mathscr{F}(E,E),\circ)$ **b)** $(S_E,\circ)$

Exercice 1 — Montrer que si $(G,\star)$ et $(G',\cdot)$ sont des groupes, alors $G\times G'$ est un groupe pour la loi produit.

2 Sous-groupes

- **Cadre.** • $(G,\star)$ est un groupe • H est une partie de G.

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i)

ii) H est stable par $\star$:

iii) H est stable par passage à l'inverse :

Exemple 2 *Vrai ou faux ?* — **a)** $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ **b)** $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

Exercice 2 — Soit H un sous-groupe de G. On note e l'élément neutre de G. Montrer que $e\in H$.

Théorème 1

Si H est un sous-groupe de G, alors $(H,\star)$ est :

Exercice 3 — Démontrer le théorème

SF 1 : pour montrer que G est groupe

Le plus simple est de démontrer que G est un sous-groupe d'un groupe de référence.
Exemple 3 — **a)** Montrer que $(\mathbb{U},\times)$ est un groupe. **b)** Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$.

3 Morphismes de groupes

- **Cadre.** • $(G,\cdot)$ est un groupe d'élément neutre e. • $(G',\star)$ est un groupe d'élément neutre e'.

Définition 3

Une application $f:G\to G'$ est un *morphisme de groupes* si :

- **Vocabulaire.** On appelle *isomorphisme* de G sur G' tout morphisme de groupe bijectif de G sur G'.

Exemple 4 — **a)** $\exp:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*,\times)$ est un morphisme de groupes
b) $\ln:(\mathbb{R}_+^*,\times)\to(\mathbb{R},+)$ est un morphisme de groupes

Exercice 4 — Soit $f:G\to G'$ un morphisme de groupe. Montrer que : **a)** $\boxed{f(e)=e'}$ **b)** $\forall x\in G,$ $\boxed{f(x^{-1})=f(x)^{-1}}$

Définition 4

Soit $f:G\to G'$ un morphisme de groupe.
- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f :
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble :

Exercice 5 — Montrer que : **a)** $\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est un sous-groupe de } G}$ **b)** $\boxed{\operatorname{Im} f \text{ est un sous-groupe de } G'}$

Exemple 5 — L'application $f:z\mapsto e^z$ est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Théorème 2

Soit $f:G\to G'$ un morphisme de groupe. • f est injectif ssi : • f est surjectif ssi :

Exercice 6 — Démontrer la première équivalence.

Exemple 6 SF 3 — Montrer que l'application $\varphi:g\mapsto\gamma_g$ est un morphisme de groupe injectif de G dans S_G.

Exemple 7 — **1.** Montrer que les morphismes de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ sont les applications $z\mapsto z^p$ pour $p\in[\![0,n-1]\!]$
2. Soit $p\in[\![0,n-1]\!]$. Montrer que $f:z\mapsto z^p$ est un isomorphisme si et seulement si $p\wedge n=1$.