

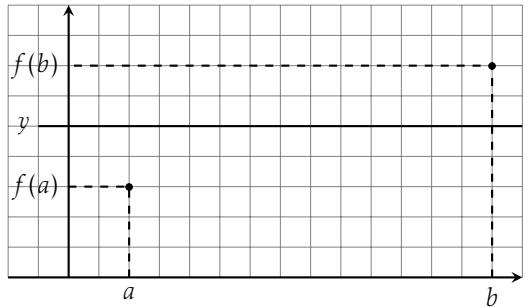
II Trois grands théorèmes de continuité

Continuité sur un intervalle

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I . Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$:



- **Reformulation.** Le TVI affirme que $f(I)$ est :

Exercice 1 — On suppose par exemple que $f(a) \leq f(b)$. Démontrer le TVI par dichotomie.

SF 10 : Montrer qu'une équation du type $f(x) = g(x)$ a au moins une solution

Exemple 1 ❤ — Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que f possède un point fixe c'est à dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Exemple 2 — Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

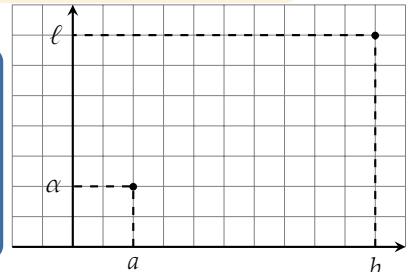
Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si : i)

ii)

iii) Aux bornes :

Alors :



Exercice 2 — Démontrer le théorème dans le cas où ℓ est finie.

- **Remarque.** On dispose d'énoncés analogues lorsque f est strictement décroissante et si $I =]a, b]$, $]a, b[$ ou $[a, b]$

SF 13 : Etudier une suite implicite

Exemple 3 — 1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^n \ln x = 1$ a une unique solution dans $[1, +\infty[$, notée x_n
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

2 Fonction continue sur un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$ alors
- Autrement dit :

- **Reformulation.** Le théorème affirme que $f([a, b])$ est :

Exercice 3 ❤ — Démontrer l'existence d'un maximum pour f dans le théorème précédent.

Exemple 4 ⚡ **Attention** ⚡ — Donner un exemple de fonction f continue sur $]a, b]$ mais qui n'est pas bornée.

SF 12 : Montrer qu'une fonction est bornée

Exemple 5 — Montrer que la fonction $f : x \mapsto x(\ln x) \sin(\frac{1}{x})$ est bornée sur $]0, 1]$.

Exemple 6 — Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

- Montrer que f est bornée
- Montrer avec un contre-exemple que f n'atteint pas nécessairement ses bornes

3 Continuité d'une réciproque

Théorème 4 : (Admis)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective alors :

Théorème 5 : Continuité des fonctions réciproques

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I . On sait que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

- 1.
- 2.

Exercice 4 — Démontrer le théorème précédent dans le cas où f est strictement croissante.

- **Remarque.** Ce théorème justifie la continuité et le sens de variations des fonctions Arctan, Arcsin et Arccos.

Exercice 5 — Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, strictement croissante, telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell} +\infty$.