III Interprétation géométrique des complexes

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\frac{z-b}{z-a}\right| =$
- $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv$

A, B et M sont alignés ssi :

(MA) et (MB) sont perpendiculaires ssi :

Exercice 1 — Démontrer le théorème

SF 18 : Traduire l'orthogonalité ou l'alignement

Exemple 1 — Trouver les $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ tels que z , z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en z.

2 Transformations du plan

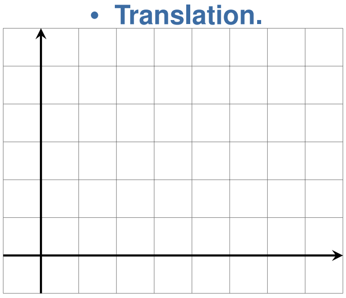
■ Translations, homothéties, rotations

Définition 1

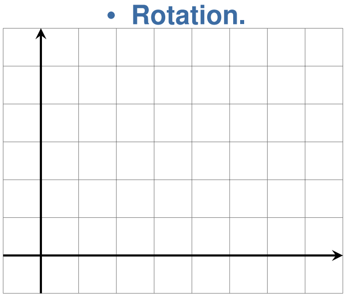
Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application
- La rotation de centre ω et d'angle θ est l'application

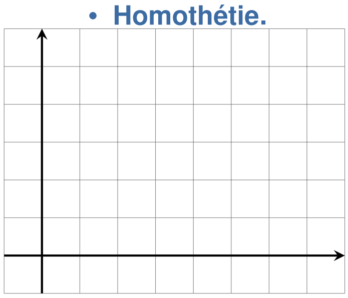
- **Translation.**



- **Rotation.**



- **Homothétie.**



■ Similitudes directes

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

Théorème 2

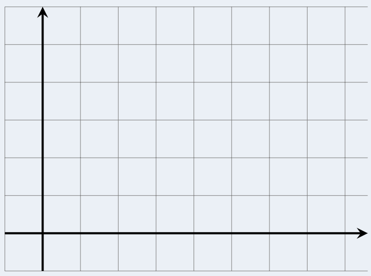
Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur (d'affixe) b.
- Si $a \neq 1$, alors :

i)

ii)

On dit que f est la similitude de centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.



Exercice 2 — Démontrer les points *i)* et *ii)* du théorème.

- **Remarque.** En écrivant $a = \rho e^{i\theta}$: .

SF 17 : Caractériser géométriquement une application $f : z \mapsto az + b$

Exemple 2 — Caractériser géométriquement la similitude $z \mapsto 2iz + 2 + i$.