I Primitives et intégrales

- **Cadre.**
- I est un intervalle non vide, non réduit à un point • $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ • $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction

1 Primitives

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) *ii)*

Exemple 1 — La fonction Arctan est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Exemple 2 — Montrer que la fonction $F : x \mapsto -\ln(\cos x)$ est une primitive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tan.

Exemple 3 — Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, une primitive de $t \mapsto e^{\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{\lambda t}}{\lambda}$.

- **Remarque.** Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Exemple 4 — Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la fonction

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I.
Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

Exercice 1 — Démontrer ce théorème.

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I.

-
-

- **Conséquence.** Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Théorème 3

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :

Pour tous $a, b \in I$:

Exercice 2 — Démontrer ce théorème à l'aide du théorème fondamental de l'analyse.