# I Famille quelconque d'éléments de $[0,+\infty]$

## 1 Calculs dans $[0,+\infty]$

### Prolongement de l'ordre et des opérations à $[0,+\infty]$

- *Ordre* $\leq$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$ :
- *Addition*. Pour tout $x \in [0,+\infty]$ :
- *Multiplication*. Pour tout $x \in ]0,+\infty]$ : et $\boxed{0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 \underset{\text{déf.}}{=}}$
- *Borne supérieure*. Toute partie de $[0,+\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0,+\infty]$.

## 2 Somme d'une famille d'éléments de $[0,+\infty]$

- **Cadre.** • $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ • On note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$

### Définition 1

La *somme de la famille* $(u_i)_{i \in I}$ est l'élément de $[0,+\infty]$ :

- **Remarque.** Si $I$ est fini, cette notion coïncide avec la notion usuelle de somme (finie).
- **Remarque.** Si l'un des $u_i$ vaut $+\infty$ : $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$

- **Cas des séries.** Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels **positifs** :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série converge} \\ +\infty & \text{si la série diverge} \end{cases}$$

**Exercice 1** — Démontrer le résultat sur le cas des séries à termes positifs.

## 3 Règles de calcul

### Théorème 1 : Sommation par paquets (admis)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $[0,+\infty]$.
Soit$(I_k)_{k \in K}$ un recouvrement disjoint de $I$ :

### Théorème 2 : Opérations

Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ des familles de $[0,+\infty]$.

- *Linéarité*. • Pour tout réel positif $\lambda$ : •
- *Croissance*. Si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$ :
- *Invariance par permutation*. Pour toute permutation $\sigma$ de $I$ :

**Exercice 2** — Démontrer ce théorème

### Théorème 3 : Fubini

Soit $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $[0,+\infty]$ :

**Exercice 3** — Démontrer le théorème de Fubini à l'aide du théorème de sommation par paquets

### SF 4 : utiliser le théorème de Fubini pour intervertir des sommes

**Exemple 1** SF 4 — **a)** Calculer $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{p^q}{e^{2p} q!}$ **b)** Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \big(\zeta(n) - 1\big)$ où pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ : $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

### SF 6 : intervertir des sommes « triangulaires »

**Exemple 2** SF 6 — **a)** Etablir : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(2)$ **b)** Justifier la convergence et calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

### SF 7 : sommer à « $p+q$ constant »

**Exemple 3** SF 7 — Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{p}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

### En pratique : utiliser une décomposition en éléments simples

**Exemple 4** SF 6 — Calculer : $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q-1)} = 2\zeta(2)$.