I Généralités

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

Retenir :

Vocabulaire	
On écrit ...	**au lieu de ...**
« le série $\sum u_n$ »	« la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ »
« la série $\sum u_n$ converge »	«la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge»

Définition 2

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série est :
- Pour $n \in \mathbb{N}$, le n^e *reste* de la série est :

Retenir :

Attention Ne pas confondre les notations :

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente alors :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et :

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi :

Exercice 1 — Démontrer le théorème 3.

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

Exemple 1 — Etudier la nature de : **a)** $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ **b)** $\sum \frac{1}{n^2}$ **c)** $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ **d)** $\sum \frac{1}{n}$

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle. La *série alternée* $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$: • •

Exercice 3 ♥ *Ex. 8, banque INP* — Etablir ce résultat en montrant que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors :

Attention : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge. Par exemple :

Exercice 4 — Démontrer ce théorème.

Divergence grossière : si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge

Exemple 2 — Etudier la nature de $\sum u_n$: **a)** $u_n = \frac{n}{3n+2}$ **b)** $u_n = (1-\frac{1}{n})^n$ **c)** $u_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3 *SF 9* *SF 10* — **a)** Montrer que $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge **b)** On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann* :

Exercice 5 ♥ — Démontrer le théorème à l'aide d'une comparaison série-intégrale.