Espaces préhilbertiens

Formulaire

Espace E	Produit scalaire $(x \mid y)$	Inégalité de Cauchy-Schwarz $(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)$	Norme $\|x\|$
$\mathbb{R}^n$	$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$	$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
$\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$	$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$	$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$	$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}$
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}b_{i,j}$	$\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}b_{i,j}\right)^2 \leq \left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}^2\right)\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} b_{i,j}^2\right)$	$\|A\| = \sqrt{\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}^2}$

Produit scalaire et normes

- $\|x\|^2 = (x \mid x)$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz :* $\boxed{|(x \mid y)| \leq \|x\|\,\|y\|}$ avec égalité ssi x et y sont colinéaires
- *Identités remarquables :*
  $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)}$ $\boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)}$ $\boxed{\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y \mid x-y)}$
- *Formule de polarisation :* $\boxed{(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)}$
- *Inégalité triangulaire :* $\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ avec égalité ssi x et y sont colinéaires de même sens

Formulaire : Coordonnées, produit scalaire et norme en base orthonormée

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E et si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$:

- *Coordonnées.* • Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $x_i = (x \mid e_i)$ • Autrement dit : $\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i}$
- *Produit scalaire et norme.* • $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ • $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Formulaire : Projeté et distance à un sous-espace muni d'une base orthonormée

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une b.o.n de F et si $x \in E$: • $\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i)\, e_i}$ (note [a]) • $\boxed{\mathrm{d}(x,F) = \|x - p_F(x)\|}$

a. Mais on sait faire sans base orthonormée (voir le SF 9)

Formulaire : Projeté et distance à un hyperplan H

Si a est un vecteur normal à H, pour tout $x \in E$: • $\boxed{p_H(x) = x - \frac{(x \mid a)}{\|a\|^2}a}$ • $\boxed{\mathrm{d}(x,H) = \frac{|(x \mid a)|}{\|a\|}}$

Formulaire : Orthonormalisation d'une famille libre $(u_1,\dots,u_n)$

• Pour $k=1$: $\boxed{e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}}$ • Pour $k=2$: $\boxed{e_2 = \frac{u_2 - (u_2 \mid e_1)e_1}{\|u_2 - (u_2 \mid e_1)e_1\|}}$

Plus généralement, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$: • On pose $\boxed{\widetilde{e}_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (u_k \mid e_i)\, e_i}$ • On normalise : $\boxed{e_k = \frac{\widetilde{e}_k}{\|\widetilde{e}_k\|}}$