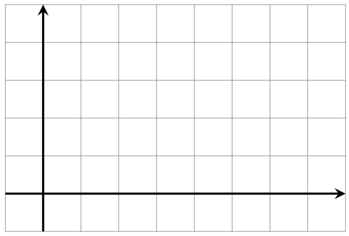
III Forme trigonométrique

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est :



- **Notation.** On écrit :
- **Remarque.** Un tel θ existe car :
- **Vocabulaire.** On appelle *forme trigonométrique de* z toute écriture de la forme $z = |z|e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$
- **Retenir.** Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ ssi :

Exemple 1 — Mettre sous forme trigonométrique les complexes : **a)** $z_1 = 1 + i$ **b)** $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2 + 2i}$.

Exemple 2 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Déterminer tous les $p \in \mathbb{Z}$ tels que ω^p soit réel.

Théorème 1

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$: • $\arg(zz') \equiv$ • $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv$

SF 9 : calculer les puissances d'un complexe

Exemple 3 — Donner la forme algébrique de $(1+i)^{10}$.

Exercice 1 — Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \dots, z_n$ ont même argument.

2 Exponentielle complexe

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=}$

Par construction : • $|\exp(z)| =$ • $\arg(\exp z) \equiv$

Exemple 4 — Donner la forme algébrique de $Z = \exp(2 + i\frac{\pi}{3})$.

Théorème 2 : Relation fonctionnelle

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

Exercice 2 — Démontrer la formule du théorème.

SF 10 : Résoudre une équation de la forme $\exp(z) = a$

Exemple 5 — Résoudre les équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: **a)** $\exp(z) = \sqrt{3} + i$ **b)** $\exp(iz\pi) = 1 - i$

3 Complément : dérivation des fonctions complexes

- **Cadre.** • On considère une fonction $\varphi : I \to \mathbb{C}$ • Pour tout $t \in I$ on note $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ où $u(t), v(t) \in \mathbb{R}$

Définition 3

φ est dérivable si les fonctions u et v le sont. En ce cas, on pose, pour $t \in I$: $\varphi'(t) \underset{\text{déf.}}{=} u'(t) + iv'(t)$

- **Remarques:** • Les formules de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient restent valables.

• On étend de même la définition de l'intégrale : $\forall a, b \in I$ $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 3

Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable alors la fonction $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ est dérivable sur I et : $\left(e^{\varphi}\right)' = \varphi' e^{\varphi}$