II Formes n linéaires alternées

- **Cadre.** • $n \in \mathbb{N}^*$. • E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
  • $f : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire au sens de la définition suivante.

Définition 1

On dit que f est *n-linéaire* si elle est « linéaire par rapport à chaque variable » *i.e.* :
• pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ • pour tous tous $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n \in E$

Exemple 1 —
1. Un produit scalaire $(x,y) \mapsto (x\,|\,y)$ sur E est en particulier une forme bilinéaire sur E.
2. L'application $f : (A,B,C) \mapsto \mathrm{tr}(ABC)$ est une forme trilinéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2 *Exemple de référence* — Sur $E = \mathbb{R}^2$.
On note f l'application définie pour tous $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ par : $f(u,v) = xy' - x'y = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
Cette application est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$. Elle est de plus alternée au sens de la définition suivante.

Définition 2

f est *alternée* si pour tous $x_1,\dots,x_n \in E$:

Théorème 1

Si f est alternée, alors elle est *antisymétrique i.e.* pour tous $x_1,\dots,x_n \in E$ et toute transposition τ de $[\![1,n]\!]$:

- **Remarque.** Si $\tau = (i,j)$ cela s'écrit :

- **Conséquence.** Pour toute permutation σ :

Exercice 1 — Démontrer le théorème dans le cas où $\tau = (1,2)$.

- **Remarque.** La réciproque du théorème 1 est vraie : toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée.

En pratique : effet des « opérations élémentaires »

Si f est n linéaire alternée pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$ disctincts et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
- Type 1 : $f(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_n) = \lambda f(x_1,\dots,x_n)$
- Type 2 : $f(\dots,x_i + \lambda x_j,\dots,x_j,\dots) = f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)$
- Type 3 : $f(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots) = -f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)$

Exercice 2 — Démontrer le point 2 *i.e.* vérifier que : $f(\dots,x_i + \lambda x_j,\dots,x_j,\dots) = f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)$

Théorème 2 : Une forme n-linéaire alternée s'annule sur toute famille liée

Si f est alterné et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée de n vecteurs de E :

Exercice 3 ♥ — Démontrer le théorème.

Exercice 4 ♥ *Expression d'une forme n-linéaire alternée* — On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (b_1,\dots,b_n)$ une base de E et $x_1,\dots,x_n \in E$. Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, on note $a_{i,j}$ la i-ième coordonnée de x_j dans $\mathscr{B}$.

Montrer que : $\boxed{f(x_1,\dots,x_n) = f(b_1,\dots,b_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \Big(\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \Big).}$