- **Rappel.** Soit $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que *$x$ est congru à y modulo α* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = y + k\alpha$.
- **Notation.** On note alors : $x \equiv y\ [\alpha]$

Exemple 1 *Modulo 2π* — **a)** $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \qquad [2\pi]$ **b)** $8\pi \equiv \qquad [2\pi]$ **c)** $15\pi \equiv \qquad [2\pi]$ **d)** $\dfrac{11\pi}{3} \equiv \qquad [2\pi]$

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

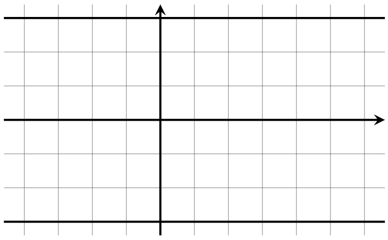
Exemple 2 ♥ — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$ et : $u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos(n\theta)$.

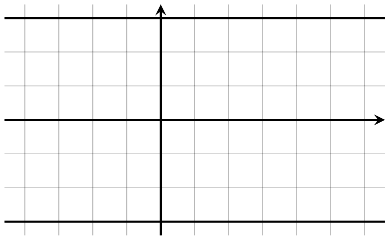
Théorème 1 : Propriétés

i)

ii)

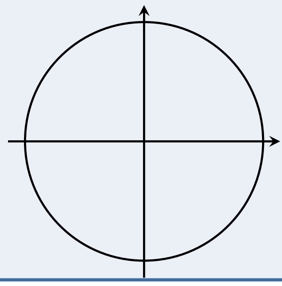
iii)

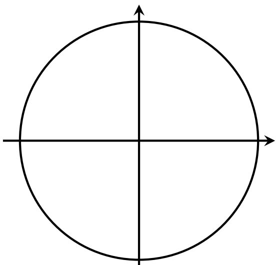




Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:





Théorème 3

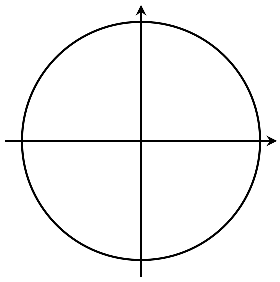
Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow$



SF 11 : Résoudre une équation trigonométrique

Exemple 3 — Résoudre l'équation $\cos x = \sin x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 5 : Réduction de $a\cos t + b\sin t$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On peut trouver un réel φ tel que :

Exercice 1 ♥ — Démontrer le théorème en commençant par factoriser $a\cos t + b\sin t$ par $\sqrt{a^2 + b^2}$.

SF 10 : réduire $a\cos t + b\sin t$

♥ **Exemple 4** — Trouver A et φ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos t + \sqrt{6}\sin t = A\cos(t - \varphi)$.

Exemple 5 — Résoudre l'équation $\cos t + \sin t = 1$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

2 La fonction tangente

Définition 1

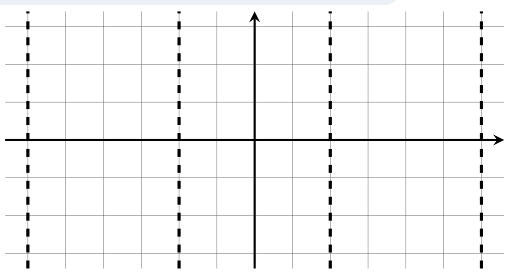
La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par :

Théorème 6

i)

ii)

iii)



Exercice 2 — **a)** Prouver le point *iii)* **b)** Démontrer la formule donnant $\tan(a + b)$