1 Fonctions monotones

- **Cadre.** • D est une partie de $\mathbb{R}$ • $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur D.

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:

- **Vocabulaire.** On dit que f est *monotone sur* D si elle est croissante sur D ou décroissante sur D.

Exemple 1 — Montrer que pour tout $x > 0$: **a)** $\ln(x+1) - \ln x \geq 0$ **b)** $(x+1)\ln(x+1) - x\ln x \geq 0$.

Théorème 1

Si f et g sont croissantes sur D, alors :

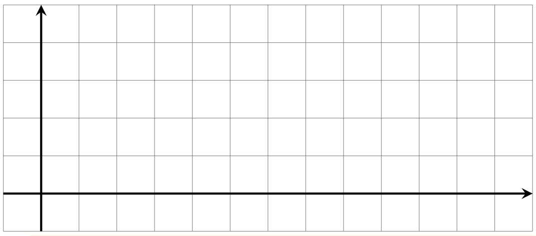
Exercice 1 — Démontrer ce théorème.

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :
• *majorée* si : • *minorée* si :

• *bornée* si :



Exercice 2 — Démontrer l'équivalence de la définition 2.

Définition 3

f possède un maximum en a si :

- **Notation.** On note : $f(a) = \max_{x \in D} f(x)$ ou $f(a) = \max_D f$.

Exemple 2 — Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x+1}{x^2+3} \leq \dfrac{1}{2}$.

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

- **Cadre.** • I est un intervalle de $\mathbb{R}$ • $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I.

SF 7 : établir une inégalité du type « $\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$ » – méthode 1

♥ **Exemple 3** — **a)** Montrer : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$. **b)** Interpréter graphiquement cette inégalité.

Exemple 4 — Montrer que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$: $\frac{x+1}{x-1} \ln x \geq 2$.

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I : • Pour tous $a, x \in I$:

• Pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tout $x \in [a,b]$:

Exercice 3 ♥ — Démontrer le premier point.

SF 7 : établir une inégalité du type « $\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x)$ » – méthode 2

♥ **Exemple 5** — Etablir : **a)** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$ **b)** $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$ **c)** $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$

4 Quelques règles de rédaction autour des fonctions

- **Attention.** Ne pas confondre « f » et « $f(x)$ » : • f désigne la fonction • $f(x)$ est la valeur de f en x

Mal	Bien
On considère la fonction $f(x) = e^{2x} + 1$	On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} + 1$
la fonction $f(x) = e^{2x} + 1$ est dérivable pour $x \in \mathbb{R}$	la fonction $f : x \mapsto e^{2x} + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \left(e^{2x} + 1\right)' = 2e^{2x}$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{2x}$