III Fonction réciproque

- **Cadre.** • I, J sont des intervalles • $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J.

1 Notion de bijection

Définition 1

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si :

- **Notation.** Dans ce cas, on note f^{-1} la fonction de J dans I qui à $y \in J$ associe son antécédent par f.
- **Vocabulaire.** La fonction f^{-1} est la fonction *réciproque* de f.

Exemple 1 — exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sa réciproque est ln.

- **Graphiquement.** Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

2 Le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

- **Cadre.** On suppose ici que $I = [a, b[$ avec $a < b$ (et éventuellement $b = +\infty$)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

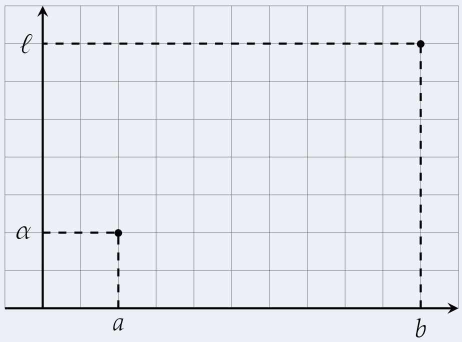
Si :

i)

ii)

iii) Aux bornes :

Alors :



- **Remarque.** On dispose d'énoncés analogues si f est strictement décroissante et/ou $I =]a, b]$, $]a, b[$ ou $[a, b]$

Exemple 2 *SF 3* — Montrer que $f : x \mapsto xe^x$ est bijective de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

3 Calcul de $f^{-1}(y)$

En pratique : pour calculer $f^{-1}(y)$

Pour $y \in J$ fixé, on résout l'équation : $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$

Exemple 3 — Montrer que $f : x \mapsto 10^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de f^{-1}.

4 Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : (Admis provisoirement)

Si :

-
-
-

Alors f^{-1} est dérivable sur J et :

Exemple 4 — On note W la réciproque de la fonction $x \mapsto xe^x$ étudiée à l'exemple 2.
Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et que pour tout $x > -e^{-1}$: $W'(x) = \dfrac{W(x)}{x\big(1 + W(x)\big)}$.