I Manipuler des inégalités

1 Inégalités et opérations

Théorème 1 : Inégalités et opérations

Soient $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$.

- *Addition* : si $a \leq b$ et $c \leq d$: $a + c \leq b + d$.
- *Multiplication* :
  - *par un réel positif*. Si $a \leq b$ et $k \geq 0$: $ka \leq kb$.
  - *par un réel négatif*. Si $a \leq b$ et $k \leq 0$: $ka \geq kb$
  - *d'inégalités positives*. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$: $0 \leq ac \leq bd$
- *Inverse*. Si $0 < a \leq b$: $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

SF 1 : majorer une fraction

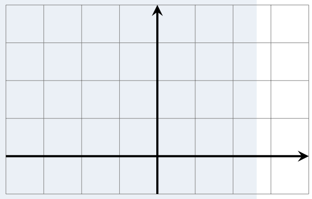
Exemple 1 — Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$:
$$\frac{1}{7} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq 1$$

SF 2 : inéquation et quotients

Exemple 2 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-2}{x+2}$

2 Valeur absolue

Définition 1



- *Définition*. Pour $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue* de x est le réel : $|x| =$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- *Règles de calcul* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: • •
- *Inégalité triangulaire*.

SF 3 : résoudre une inéquation avec des valeurs absolues

Exemple 3 — Résoudre l'inéquation : $|2 - x| + |2x + 4| \leq 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 4 *SF 5* — Etablir, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: **a)** $|x - y| \leq |x| + |y|$ **b)** $|x - y| \geq |x| - |y|$ **c)** $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si :
- $|x - a| \leq r$ ssi :

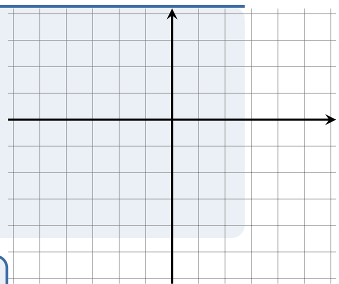
- **Lien avec la racine carrée.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$.
  - $\sqrt{x^2} =$
  - $x^2 = a$ ssi
  - $x^2 \leq a$ ssi

SF 4 : inéquation et racine carrée

Exemple 5 — Résoudre l'inéquation : $2x \leq \sqrt{x^2 + 1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2



- La *partie entière de* x est le plus :
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n = \lfloor x \rfloor$ ssi :

- **Inégalités à retenir.** • •

Exemple 6 — **a)** $\lfloor 3.745 \rfloor =$ $\lfloor -2.1 \rfloor =$ **b)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemple 7 — Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$.