1 **1.** Procéder par opérations pour le caractère $\mathscr{C}^1$ (avec une composition pour $(x,y) :\mapsto \sqrt{x^2+y^2}$).

Réponse : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

2. • *Existence des dérivées partielles.*
Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

• *f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.*
Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ par exemple en montrant que $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,t)$ n'est pas continue en 0.

2 **1.** *Réponse :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2xy^4+y^5}{(x^2+y^2-xy)^2}$

et : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y^5-3xy^4+4x^2y^3}{(x^2+y^2-xy)^2}$

2. Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

3. Il s'agit de montrer la continuité en $(0,0)$ de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Par exemple, pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, étant donné $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, chercher une majoration de la forme : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \varepsilon(r)$ où $\varepsilon(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Pour cela :

- Se rappeler que $|y| \leq r$
- Montrer que $x^2+y^2-xy \geq \dfrac{1}{2}r^2$.

3 **1.** *Réponse :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

et : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

2. Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

3. Il s'agit de montrer la continuité en $(0,0)$ de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Par exemple, pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, étant donné $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, chercher une majoration de la forme : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq \varepsilon(r)$ où $\varepsilon(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

4 **1.** Exprimer g en fonction d'une primitive F de f.

Réponse à trouver :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{g(x,y)-f(x)}{y-x} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{g(x,y)-f(y)}{x-y}$$

2. Etudier les limites en 0 des taux d'accroissements

$$\frac{g(a+t,a)-f(a,a)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{g(a,a+t)-f(a,a)}{t}$$

Par exemple, pour $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)$, exprimer $\dfrac{g(a+t,a)-f(a,a)}{t}$ en fonction de F puis faire un développement limité à l'ordre 2 au numérateur de F en a à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Réponse à trouver : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \dfrac{1}{2}f'(a)$

3. En utilisant les expressions trouvées aux questions 1 et 2 et en exprimant g à l'aide de F on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \frac{F(y)-F(x)-F'(x)(y-x)}{(y-x)^2} - \frac{1}{2}f'(a)$$

On peut écrire $F(y)-F(x)-F'(x)(y-x)$ sous la forme d'une intégrale en appliquant la formule de Taylor à reste intégral à l'ordre 1 entre les points x et y.

4. Il reste à montrer que chaque fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est continue en (a,a) pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Revenir pour cela à la définition de la continuité.
Par exemple pour $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, étant fixé $\varepsilon > 0$, il s'agit de prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u = (x,y) \in B\big((a,a),\alpha\big), \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leq \varepsilon$$

Utiliser l'expression de la question précédente en traduisant la continuité de f' en a *i.e.* la fait que $f'(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} f'(a)$.

5 Exprimer φ à l'aide d'une primitive F de f.

6 **1.** *Réponse :* $z = 2x$

2. Il s'agit à k fixé de résoudre l'équation $f(x,y) = k$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ puis de reconnaître géométriquement l'ensemble des solutions.

Réponse :

- *Si $k \geq -1+e^{-1}$:*
  c'est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{\ln(1+k)+1}$.
- *Si $k < -1+e^{-1}$: c'est l'ensemble vide.*

7 Utiliser la règle de la chaîne.

8 Utiliser la règle de la chaîne.

1. *Réponse :*

$$\psi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x,f(x,x)\big) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,f(x,x)\big)$$

2. a)

b) *Réponse :*

- $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x,f(x,y)\big) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x,f(x,x)\big)$
- $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x,f(x,x)\big)$

9 **a)** Un seul point critique : $(0,3)$
C'est un minimum global.

b) Deux points critiques :
- $(0,0)$ qui est un minimum global.
- $(-\frac{2}{3},0)$ qui n'est pas un extremum.

c) Points critiques : $(n\pi,0)$ où n décrit $\mathbb{Z}$.
- Les $(2k\pi,0)$ ne sont pas des extremums
- Les $(2k\pi+\pi,0)$ sont des minimums

10 **a)** Deux points critiques :
- $(0,0)$ qui n'est pas un extremum.
- $(1,1)$ qui n'est pas un extremum, par exemple en regroupant les termes comme suit :
$f(1+h,1+k)-f(1,1)=h^3+3h^2+k^3+2k^2+\left(k^2-3hk\right)$
puis en mettant le dernier terme sous forme canonique.

b) Un seul point critique : $(0,0)$. Ce n'est pas un extremum, par exemple en considérant $f(x,0)$ et $f\left(\frac{3}{2}y^2,y\right)$.

c) Trois points critiques :
- $(0,0)$ qui n'est pas un extremum.
- $(1,1)$ qui est un minimum : par exemple en utilisant l'inégalité $2hk \leq h^2+k^2$.
- $(-1,-1)$ qui est un minimum.

11 **1.** En posant $\gamma(t)=(1-t)p+tq$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, on obtient $\varphi=f\circ\gamma$ et on peut dériver cette expression à l'aide de la règle de la chaîne (utiliser la formule du III donnant l'expression à l'aide du gradient).
Réponse à trouver : $\varphi'(t)=\left(\nabla f\left((1-t)p+qt\right)\mid q-p\right)$

2. Supposer que f admet en $p\in\mathbb{R}^2$ un point critique. Fixer un point $q\in\mathbb{R}^2$ quelconque, il s'agit de montrer que : $f(q)\geq f(p)$. Avec les notations de la question 1 ceci revient à montrer que $\varphi(1)\ \geq\varphi(0)$.
Pour ce faire, montrer que φ est une fonction croissante sur $[0,1]$ en exploitant le résultat de la question **1.**.

12

1. Dériver la fonction φ à l'aide de la règle de la chaîne

2. Appliquer le théorème des bornes atteintes à $g:\theta\mapsto f(\cos\theta,\sin\theta)$ sur $[0,2\pi]$.

3. Avec la question **2.**, il suffit de montrer que pour tout $(x,y)\in F$: $\quad f(x,y)\geq\min\limits_{(a,b)\in S} f(a,b)$.
Etant donné $(x,y)\in F$, poser :
$$a=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad\text{et}\quad b=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
de sorte que $(a,b)\in S$ et utiliser le résultat de **1.**

13 **1.** Poser $A=\{f(x,y)\,;\,(x,y)\in K\}$: c'est une partie de $\mathbb{R}$.
Il s'agit de montrer que la partie A possède une borne supérieure.

2. Procéder par l'absurde : si $M=f(x,y)$ pour un certain $(x,y)\in\,]0,1[^2$, alors (x,y) serait un point critique de f.

3. D'après la question qui précède, le maximum est atteint sur la frontière de K *i.e.* en un point de la forme $(x,0)$ ou $(x,1)$ ou $(0,y)$ ou $(1,y)$. Etudier la fonction f sur chacun des quatre « morceaux »
$$L_1=\{(x,0)\,;\,x\in[0,1]\},\quad L_2=\{(x,1)\,;\,x\in[0,1]\}$$
$$L_3=\{(0,y)\,;\,y\in[0,1]\}\quad\text{et}\quad L_4=\{(1,y)\,;\,y\in[0,1]\}$$
on est ramené à l'étude d'une fonction d'une seule variable dans chaque cas.

4. On peut utiliser la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : il existe une suite $(z_n)\in A^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$. La suite (z_n) est donc de la forme $\left(f(x_n,y_n)\right)$ pour certaines suites (x_n) et (y_n) à termes dans $[0,1]$.
En appliquant (deux fois) le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire des sous-suites $(x_{\varphi\circ\psi(n)})$ et $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui convergent respectivement vers x et y dans $[0,1]$. Faire tendre n vers l'infini dans l'égalité
$$z_{\varphi\circ\psi(n)}=2x^3_{\varphi\circ\psi(n)}+6x_{\varphi\circ\psi(n)}y_{\varphi\circ\psi(n)}-3y^2_{\varphi\circ\psi(n)}+2$$
pour montrer que $M=f(x,y)$.

14 **1.**
- Pour montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est $(\alpha-1)$-homogène : fixer $t>0$ et $y\in\mathbb{R}$ puis dériver par rapport à x l'égalité :
$$\forall x\ \in\mathbb{R},\quad f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$$
- Procéder de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$
- Pour obtenir l'identité d'Euler, fixer $x,y\in\mathbb{R}$ puis dériver par rapport à t (règle de la chaîne) l'égalité :
$$\forall t>0,\quad f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$$

2. Fixer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ puis dériver la fonction $F:t\mapsto f(tx,ty)$.
En utilisant la relation $(\star)$ on montre que F est solution de l'équation différentielle $y'-\dfrac{\alpha}{t}y=0$. Il suffit de résoudre l'équation (utiliser la valeur de $F(1)$ pour déterminer la constante).

15 **1.** Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, étant fixé $y\in\mathbb{R}$, primitiver par rapport à x l'égalité :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$
On obtient une expression de $f(x,y)$ en fonction d'une constante $C(y)$ qui dépend a priori de y. En dérivant l'expression de $f(x,y)$ on constate que C est constante.
Ne pas oublier la phase de synthèse.
Solutions : toutes les fonctions de la forme
$$(x,y)\mapsto -\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}+C$$

2. Procéder par l'absurde et dériver $F:t\mapsto f(\cos t,\sin t)$ avec la règle de la chaîne. On obtient : $\quad F'(t)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Obtenir une contradiction en exploitant la 2π-périodicité de F.

16 Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, fixer v et dériver la fonction $u \mapsto F(u,v) = f(u, v-2u)$.

On obtient : $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = v - u$.

Primitiver par rapport à u : $\quad F(u,v) = uv - \dfrac{u^2}{2} + C(v)$

où la « constante de primitivation C » dépend de v.
Déterminer $C(v)$ en prenant $u = 0$.
On « revient » à $f(x,y)$ en prenant $u = x$ et $v = y + 2x$.
Ne pas oublier la synthèse.

17

1. Procéder par analyse-synthèse.

   Dans l'analyse, fixer $x, y \in \mathbb{R}$ et montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$ est constante (la valeur de la constante s'obtient en considérant $\varphi(0)$).
   Ne pas oublier la synthèse.
   On trouve que seule la fonction nulle est solution.
2. • Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, procéder par composition.

   • En $(0,0)$. Calculer d'abord $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0)$ (taux d'accroissements) puis majorer les quantités $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)\right|$ et $\left|\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right|$ en fonction de $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. Il s'agit d'une équation linéaire et l'équation homogène a été résolue à la question **1.**.
   Utiliser la question **2.** pour trouver une solution particulière (proportionnelle à h).

18

1. Dériver φ à l'aide de la règle de la chaîne.

   On constate que φ est constante pourvu que $Y' - 2tY = 0$.
2. Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse la question 1 assure que $f(t, Ce^{t^2}) = u_0(t)$ pour tous $t, C \in \mathbb{R}$.
   On en déduit une expression de $f(x,y)$ pour tout (x,y).
   Ne pas oublier la phase de synthèse.
   Solution : $(x,y) \mapsto u_0(ye^{-x^2})$