Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

1 ★★ SF 6 SF 4 SF 5 SF 3 On pose pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point.

2 ★★ SF 6 SF 4 SF 5 On pose pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 ★★ SF 6 SF 4 SF 5 On pose pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles en $(0,0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4 ★★★ SF 6 SF 4 SF 5 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note U l'ouvert $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$ et on pose, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x\neq y\\ f(x) & \text{si } x=y\end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculer ses dérivées partielles.
2. Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles en (a,a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$.
3. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(x,y)\in U$. Montrer que :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)=\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\big(f'(t)-f'(a)\big)\,\mathrm{d}t$$
4. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5 ★★★ SF 6 SF 4 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
Montrer que $\varphi:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_{x^2}^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

6 ★★★ SF 4 Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y)=-1+e^{x^2+y^2+2x}$$

1. Déterminer une équation du plan tangent à f en $(0,0)$.
2. Décrire géométriquement les lignes de niveau de f.

Règle de la chaîne

7 ★★★★ SF 8 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi:t\mapsto f(2t,1+t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que $F:(u,v)\mapsto f(u^2+v^2,uv)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

8 ★★★★ SF 8 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Calculer la dérivée de $\psi:x\mapsto f\big(x,f(x,x)\big)$
2. Calculer les dérivées partielles de :
   a) $F:(x,y)\mapsto f(y,x)$ **b)** $G:(x,y)\mapsto f\big(x,f(x,y)\big)$

Problèmes d'extremums

9 ★★★★ SF 4 SF 7 Déterminer les extremums locaux de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

a) $f:(x,y)\mapsto x^2+xy+y^2-3x-6y$
b) $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2+x^3$
c) $f:(x,y)\mapsto\cos x+y^2$

10 ★★★★ SF 4 SF 7 Déterminer les extremums locaux de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

a) $f:(x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy$
b) $f:(x,y)\mapsto 2y^4-3xy^2+x^2$
c) $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4-4xy$

11 ★★★★ SF 8 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. Pour tous $p,q\in\mathbb{R}^2$ exprimer la dérivée de la fonction $\varphi:t\mapsto f\big((1-t)p+tq\big)$ en fonction du gradient de f.
2. On suppose :
$$\forall q,p\in\mathbb{R}^2,\quad (\nabla f(q)-\nabla f(p)\mid q-p)\geq 0$$
Montrer que tout point critique de f en est un minimum.

12 ★★★★ SF 8 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\geq 0$$

1. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $a^2+b^2=1$. Montrer que la fonction $\varphi:t\mapsto f(ta,tb)$ est croissante $[1,+\infty[$
2. Montrer que f possède un minimum sur
$$S=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2=1\}$$
3. En déduire que f possède un minimum sur :
$$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1\}$$

13 ★★★★ SF 4 SF 7 On pose, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=2x^3+6xy-3y^2+2$$

On pose en outre $K=[0,1]^2$.

1. Justifier l'existence de $M=\displaystyle\sup_{(x,y)\in K} f(x,y)$.
2. Montrer que M n'est atteint en aucun point de l'ouvert $]0,1[^2$.
3. *On admet dans cette question que f possède un maximum sur K.* Montrer que $M=7$.
4. ★★★★ Montrer que f possède un maximum sur K.

Equations aux dérivées partielles

14 SF 8 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite *α-homogène* si pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$:

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, α-homogène. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont $(\alpha-1)$-homogènes et prouver l'identité d'Euler :

$$(\star) \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

2. Réciproquement, montrer que si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie $(\star)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, alors f est α-homogène. *Indication : Considérer la fonction $t \mapsto f(tx, ty)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.*

15 SF 4 On considère les ouverts $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Trouver toutes les $f \in \mathscr{C}^1(V, \mathbb{R})$ telles que pour tout $(x,y) \in V$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x,y) \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Indication : Procéder par l'absurde et considérer $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$.

16 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(0,t) = e^t \end{cases}$$

Indication : Considérer la fonction $F : (u,v) \mapsto f(u, v-2u)$.

17 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6 SF 5 SF 2

1. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ & f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Indication : Considérer $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

2. Montrer que $h : (x,y) \mapsto \sqrt{x^4+y^4}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
3. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^4+y^4} \\ & f(0,0) = 0 \end{cases}$$

18 SF 8 SF 9 SF 4 SF 6 Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto f\big(t, Y(t)\big)$ est constante si Y est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 à déterminer.

2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, & f(0,t) = u_0(t) \end{cases}$$