1

- *Sommabilité*. Dans $[0,+\infty]$: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n$.
Sommer par paquets avec la partition $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}^*$ puis poser $m = -n$ dans la première somme ce qui fait apparaître deux sommes géométriques de raison r.

- *Somme*. Procéder exactement de la même façon : on obtient deux sommes géométriques, l'une de raison $re^{-i\theta}$ et l'autre de raison $re^{i\theta}$.
Réponse après réduction au même dénominateur :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

2

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ où $1 \leq b_1 < \cdots < b_n$ sont les valeurs de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ triés par ordre croissant. Vérifier alors que $b_k \geq k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

2. En utilisant le recouvrement disjoint

$$\{n\in\mathbb{N} \mid n\geq 2\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \quad \text{où :} \quad s_n = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sigma(k)}{k^2 \ln k}.$$

En majorant le dénominateur puis en utilisant la question **1.**, on montre que :

$$s_n \geq \frac{1}{2^{2n+2}\ln(2^{n+1})} \times \frac{2^n(2^n+1)}{2}$$

qui est le terme général d'une série divergente.

3 En utilisant le recouvrement disjoint $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ on peut écrire dans $[0,+\infty]$: $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n$ où $s_n = \sum_{k\in I_n} \frac{1}{f(k)}$.

Il s'agit de montrer que $\sum s_n$ converge ssi $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.
Pour cela commencer par encadrer s_n en montrant que :

$$\frac{|I_n|}{n+1} \underset{①}{\leq} s_n \underset{②}{\leq} \frac{|I_n|}{n} \quad \text{et} \quad |I_n| = \lfloor f^{-1}(n+1)\rfloor - \lfloor f^{-1}(n)\rfloor$$

- *Si $\sum s_n$ converge*. En sommant ① pour $k \in [\![1,n]\!]$ puis en séparant les sommes et en réindexant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \geq \frac{\lfloor f^{-1}(n+1)\rfloor}{n+1} - \frac{\lfloor f^{-1}(1)\rfloor}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\lfloor f^{-1}(k)\rfloor}{k(k+1)}$$

La dernière somme est minorable par $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor f^{-1}(k)\rfloor}{k^2}$ Ce qui permet de majorer les sommes partielles de $\sum \frac{\lfloor f^{-1}(n)\rfloor}{n(n+1)}$ qui est de même nature que $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$

- *Si $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge* En sommant de même ② :

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \leq \underbrace{\frac{\lfloor f^{-1}(n+1)\rfloor}{n}}_{u_n} - \lfloor f^{-1}(1)\rfloor + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{\lfloor f^{-1}(k)\rfloor}{k(k-1)}}_{S_n} \leq u_n + S_n$$

Les sommes partielles de $\sum \frac{\lfloor f^{-1}(n)\rfloor}{n^2}$ sont par hypothèse majorées ce qui permet de :

- Majorer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\frac{\lfloor f^{-1}(k)\rfloor}{k(k-1)} \sim \frac{\lfloor f^{-1}(k)\rfloor}{k^2}$
- Majorer (u_n) en notant que

$$\frac{\lfloor f^{-1}(n+1)\rfloor}{4n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\lfloor f^{-1}(k)\rfloor}{k^2}$$

4 On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e$ par un calcul dans $[0,+\infty]$ en :

- Echangeant les sommes triangulaires avec par sommation par paquets avec SF 6
- Calculant la somme $\sum_{n=0}^{k} \underbrace{\frac{1}{k!}}_{\text{indép. de } n}$ qui apparait comme somme intérieure
- Calculant les deux séries exponentielles qui en résultent.

5 On obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\alpha-1}$ par un calcul dans $[0,+\infty]$ en :

- Echangeant les sommes triangulaires avec par sommation par paquets avec SF 6
- Calculant la somme $\sum_{n=0}^{k-1} \underbrace{\frac{1}{k^\alpha}}_{\text{indép. de } n}$ qui apparait comme somme intérieure

6 On obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ par un calcul dans $[0,+\infty]$ en :

- Remplaçant u_k par $k\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n(n+1)}$
- Echangeant les sommes triangulaires avec SF 6
- Calculant la somme $\sum_{k=1}^{n} k$ qui apparait comme somme intérieure

Le résultat obtenu justifie la convergence.

7 En observant que $a_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \Delta_n$, exprimer formellement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ comme une somme triangulaire puis utiliser SF 6
Le calcul formel est justifié a posteriori en montrant que la famille $\left(\frac{\Delta_p}{n}\right)_{\substack{n,p\in\mathbb{N}^* \\ n\leq p}}$ est sommable.

Pour cela, montrer (de même) que $\sum_{\substack{n,p\in\mathbb{N}^* \\ n\leq p}} \frac{|\Delta_p|}{n} = \sum_{p=1}^{+\infty} |\Delta_p| H_p$ et justifier que le résultat est fini par critère d'équivalence.

8 Utiliser $w_n \leq \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p\right)^2$ pour majorer (dans $[0,+\infty]$) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{w_n}{n}}$ par une somme triangulaire. Montrer alors que la somme obtenue est finie en calculant un équivalent de $\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{n}}$ par comparaison série-intégrale.

9 **a)** Commencer par sommer à $p+q$ constant dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q)^\alpha} \underset{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^\alpha}$$

Puis utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.
Réponse : La famille est sommable ssi $\alpha > 2$

b) Utiliser : $\frac{1}{2}(p+q)^2 \leq p^2+q^2 \leq (p+q)^2$ pour encadrer la somme dans $[0,+\infty]$ par une somme similaire à celle de la question a). *Réponse : La famille est sommable ssi $\alpha > 1$*

c) En sommant à $p+q$ constant dans $[0,+\infty]$ (SF 7) puis en séparant la somme intérieure on fait apparaître la somme des k et la somme des k^2 qui, une fois calculées donnent

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{pq}{(p+q)^\alpha} = \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n^{\alpha-1}}$$

Utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.
Réponse : La famille est sommable ssi $\alpha > 4$

d) Commencer par montrer que

$$p^\alpha + q^\alpha \leq 2(p+q)^\alpha \qquad \text{et} \qquad (p+q)^\alpha \leq 2^\alpha(p^\alpha+q^\alpha)$$

(pour la seconde distinguer les cas où $p \geq q$ et $p \leq q$)
Ceci permet d'encadrer la somme dans $[0,+\infty]$ par la somme de la question a).

10 Commencer par un calcul formel en sommant à $p+q$ constant :

$$S = \sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{a^p b^q}{(p+q)!} \underset{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}a^p b^{n-p}$$

Pour calculer la somme intérieure :

- Si $a \neq b$, utiliser $a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\sum_{p=0}^{n}a^p b^{n-p}$

  pour faire apparaître deux séries exponentielles :

  Réponse : $S = \dfrac{ae^a - be^b}{a-b}$.

- Si $a = b$, la somme intérieure vaut $(n+1)a^n$ ce qui permet ensuite de séparer la somme en n en deux séries exponentielles

  Réponse : $S = (a+1)e^a$.

Justifier le calcul a posteriori en montrant que $\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ est sommable : il suffit pour cela de calculer $\sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{|a|^p|b|^q}{(p+q)!}$ dans $[0,+\infty]$ exactement de la même façon.

11
- *Sommabilité*. Par majoration avec

$$\left|\frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q(p+q+1)}\right| \leq \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^q}$$

- *Somme*. Sommer à « $p+q$ constant »

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q(p+q+1)} \underset{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^n}{2^p 3^{n-p}(n+1)}$$

La somme en p se ramène à une somme géométrique de raison $\frac{3}{2}$.
On obtient :

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q(p+q+1)} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Réindexer les sommes via $k = n+1$ puis utiliser le résultat fourni par l'énoncé avec : $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{3}$.

Réponse : $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q(p+q+1)} = 12\ln 3 - 18\ln 2$

12 **1.** Sommer à « $p+q$ constant »

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{pq^2+p^2q} \underset{\text{SF 7}}{=} \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}$$

Effectuer une D.E.S. de $\frac{1}{X(n-X)}$ dans la somme intérieure puis séparer et réindexer la deuxième somme.

2. Avec Fubini positif :

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{pq^2+p^2q} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q(p+q)}$$

Effectuer une D.E.S. de $\frac{1}{X(p+X)}$ puis remarquer que $\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q}-\frac{1}{p+q} = H_p$ (observer les termes communs aux deux sommes qui se simplifient).

13 Exprimer formellement la somme comme une somme double en utilisant « $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty}q^k$ » :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}z^{2^n(2k+1)}$$

Utiliser ensuite le théorème de sommation par paquets en découpant $\mathbb{N}^*$ à « à valuation 2-adique constante » *i.e.* avec la partition : $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\{2^n(2k+1)\,;\,k\in\mathbb{N}\}}_{\text{Ensemble des } a\in\mathbb{N}^* \text{ t.q. } v_2(a)=n}$

La somme devient : $S = \sum_{a=1}^{+\infty}z^a$.

Le calcul se justifie a posteriori en prouvant que la famille $(z^a)_{a\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

14 **a)** Utiliser le théorème sur les familles « produit »

Réponse : $S_1 = \dfrac{\pi^4}{36}$.

b) utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid p \mid q\} = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \left\{ \left(p, \frac{k}{p}\right) ; k \geq 1 \right\}$$

Réponse : $S_2 = \dfrac{\pi^6}{540}$.

c) On peut exprimer S_1 en fonction de S_3 en découpant $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ « à PGCD constant ». Précisément, réexprimer S_1 à l'aide du théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid p \wedge q = d\}$$

puis effectuer le changement d'indice $(p,q) = (dp', dq')$ dans la somme intérieure.

Réponse : $S_3 = \dfrac{5}{2}$.

15 **1.** Dans $[0, +\infty]$:

- calculer le produit $\zeta(\alpha) \times \zeta(\alpha)$ en utilisant le théorème sur les familles « produit »
- utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition : $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left(d, \dfrac{n}{d}\right) ; d \geq 1 \quad \text{et} \quad d \mid n \right\}$

2. Même principe.

16 **1.** Remarquer que $|\lambda(n)| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis procéder par critère d'équivalence en utilisant la convergence de $\sum |x|^n$.

2. Pour la première égalité :

- Remarquer que $\dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x^{nk}$
- utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left\{ \left(d, \frac{m}{d}\right) ; d \geq 1 \quad \text{et} \quad d \mid m \right\}$$

La deuxième égalité repose sur le calcul explicite de $\sigma(m)$ pour tout $m \geq 1$. Il s'agit plus précisément de montrer que $\sigma(m) = 1$ si m est le carré d'un entier *i.e.* $m = n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma(m) = 0$ sinon.

Pour cela, noter que si m est décomposé en facteurs premiers : $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ alors les diviseurs de m sont les $d = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ pour $0 \leq k_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq k_n \leq \alpha_n$. Les propriétés de λ assurent que $\lambda(d) = (-1)^{k_1} \times \dots \times (-1)^{k_n}$

ce qui donne : $\sigma(m) = \left(\sum\limits_{k_1=0}^{\alpha_1} (-1)^{k_1} \right) \times \dots \times \left(\sum\limits_{k_n=0}^{\alpha_n} (-1)^{k_n} \right)$

Il suffit alors de calculer les sommes géométriques en notant que le résultat vaut 0 si l'un des α_i est impair et 1 si tous les α_i sont pairs.

17 **1.** Si n est décomposé en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

alors les diviseurs de n sont les $d = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ pour $0 \leq k_1 \leq \alpha_1, \dots, 0 \leq k_r \leq \alpha_r$. La définition de Λ assure que la somme se réduit aux termes de la forme $\Lambda(p_i^{k_i})$ pour $1 \leq k_i \leq \alpha_i$ (k_i termes qui valent tous $\ln(p_i)$).

2. Utiliser le théorème de sommation par paquets avec la partition :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left\{ \left(d, \frac{m}{d}\right) ; d \geq 1 \quad \text{et} \quad d \mid m \right\}$$

3. Par comparaison série-intégrale montrer que :

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha \to 1^+}{=} \frac{1}{\alpha - 1} + O(1) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)^2} + O(1)$$

et en déduire avec la question précédente que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} \underset{\alpha \to 1^+}{=} \frac{1}{\alpha - 1} + O(1)$$

Avec la définition de Λ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln p}{p^\alpha} + \underbrace{\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln p}{p^{k\alpha}}}_{=R(\alpha)}$$

Montrer que $R(\alpha) = O(1)$ en le majorant indépendamment de α par exemple en notant que

$$0 \leq R(\alpha) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^k}$$

puis en montrant que la dernière somme obtenue est finie.

18 Commencer par un calcul formel en écrivant :

$$\sum_{p,q \geq 2} \frac{(-1)^p}{q^p} = \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{q} \right)^p$$

La somme intérieure est une somme géométrique de raison $\dfrac{-1}{q}$ donc calculable explicitement. On obtient ensuite une somme téléscopique (via une D.E.S.).

Réponse : $\sum\limits_{p,q \geq 2} \dfrac{(-1)^p}{q^p} = \dfrac{1}{2}$

Le calcul est justifié a posteriori par le théorème de Fubini à condition que la famille $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p} \right)_{p,q \geq 2}$ soit sommable : calculer $\sum\limits_{p,q \geq 2} \dfrac{1}{q^p}$ dans $[0, +\infty]$ exactement de la même façon que dans le calcul formel.

19 Dans chaque cas, pour l'étude de sommabilité, calculer $\sum\limits_{(i,j) \in I \times J} |u_{i,j}|$ dans $[0, +\infty]$ où « tout est permis ». Lorsque le résultat est fini, le calcul de $\sum\limits_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j}$ se conduit de la même façon

a) On fait apparaître une somme double avec une série géométrique (en p) et une série exponentielle (en q).

Réponse :

la famille est sommable ssi $|z| < 1$ *et* $\sum\limits_{p,q \in \mathbb{N}} \dfrac{z^p}{q!} = \dfrac{e}{1-z}$

b) Avec le théorème de Fubini, on a affaire à une série exponentielle deux fois d'affilée.
Réponse :
la famille est toujours sommable et $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}} \frac{q^p z^p}{p!q!} = e^{e^z}$

c) Sommer à « $p+q$ constant » (SF 7)on fait apparaître une somme binomiale, puis une série géométrique.
Réponse : la famille est sommable ssi $|z| < \frac{1}{2}$ *et dans ce cas*
$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}} \binom{p+q}{p} z^{p+q} = \frac{1}{1-2z}$$

d) *Réponse :* La famille n'est jamais sommable.

20 **1.** Sous réserve de sommabilité de la famille $(z^{p(2q-1)})_{p,q\geq 1}$, le théorème de Fubini permet d'écrire :
$$\sum_{p,q\geq 1} z^{p(2q-1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} (z^{2q-1})^p}_{\text{somme géo de raison } z^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{z^p} \underbrace{\sum_{q=1}^{+\infty} (z^{2p})^q}_{\text{somme géo de raison } z^{2p}}$$
Le résultat s'obtient en explicitant les sommes géométriques.
Pour justifier la sommabilité, en procédant de même avec Fubini positif, on obtient :
$$\sum_{p,q\geq 1} |z|^{p(2q-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}$$
Justifier que le résultat est fini par exemple par critère d'équivalence à l'aide d'un équivalent de $\dfrac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}$

2. Remarquer que : $\displaystyle\frac{z^{p+1}}{1-z^{p+1}} = \sum_{q=1}^{+\infty} z^{q(p+1)}$
Procéder alors de la même façon qu'à la question 1 avec la famille $\left((-1)^p z^{q(p+1)}\right)_{p\geq 0, q\geq 1}$.

21 **1.** La somme est définie dans $[0,+\infty]$ et vaut :
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$
Utiliser le théorème de Fubini puis calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n$ en remarquant que la formule donnée par l'énoncé évaluée en $-x$ donne :
$$\forall x \in [-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^k = -\ln(1-x)$$
On obtient : $\displaystyle S = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\ln(k) - \ln(k-1) - \frac{1}{k}\right)$.
Revenir aux sommes partielles $\displaystyle S = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} \ldots$ en utilisant $H_N = \ln N + \gamma + o(1)$.

2. *Attention, utiliser le théorème de Fubini est ici illégal. Précisément on ne peut pas écrire :*
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$
parce que la famille $(u_{k,n})_{k\geq 1, n\geq 2} = \left(\frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1, n\geq 2}$ *n'est pas sommable (la sous-famille* $(u_{1,n})_{n\geq 1}$ *ne l'est pas)*
En revanche, la question ***1.*** *assure que l'on peut écrire :*
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$
parce que la famille $\left(\frac{1}{n}\frac{1}{k}\right)_{\boxed{k\geq 2}, n\geq 2}$ *est sommable.*
L'idée est donc d'écrire :
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$
puis :

- De calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n}$ avec le théorème de Fubini (calcul similaire à celui de la question **1.**)
- De calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ en utilisant la formule de l'énoncé avec $x = 1$

22 **1.** Se donner une partition multiplicative de n revient à se donner une liste d'exposants $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ tels que $2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots n^{\alpha_n} = n$ (où α_i est le nombre de facteurs d_j tel que $d_j = i$). En conséquence $u_n = |E_n|$ où
$$E_n = \left\{(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n-1} \;\middle|\; 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots n^{\alpha_n} = n\right\}$$

2. Avec le résultat de **1.** et le théorème sur les familles produits, majorer $\dfrac{u_n}{n^s}$ par $\displaystyle\prod_{i=2}^{n}\sum_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{1}{i^{\alpha s}} = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{1-i^{-s}}$.
Il suffit de montrer que cette dernière quantité est majorée (elle est positive). En prenant son logarithme il suffit par exemple de montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} -\ln(1-i^{-s}) < +\infty$
(utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs).

23 Avec Fubini positif :
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$
En effectuant une D.E.S. de $\dfrac{1}{(X+q^2)(X+q^2+1)}$, la somme intérieure devient télescopique.

24 Plusieurs possibilités pour calculer $\displaystyle S = \sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{pq(p+q+1)}$ dans $[0,+\infty]$

- *Option 1.* A « $p+q$ constant » $S \underset{\text{SF 7}}{=} \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n+1)k(n-k)}$
  En effectuant une D.E.S. de $\dfrac{1}{X(n-X)}$ dans la somme inté-

rieure puis après séparation et réindexation

$$S = 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Il reste à échanger les sommes triangulaires (SF 6) pour faire apparaître des télescopages via $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

- *Option 2.* Avec Fubini positif : $S = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q(p+q+1)}$

  En effectuant une D.E.S. de $\dfrac{1}{X(X+p+1)}$ puis après simplifications : $\quad S = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{p+1} \frac{1}{qp(p+1)}$.

  Il reste à échanger les sommes triangulaires (SF 6 en mettant de côté les termes correspondants à $q = 1$) pour faire apparaître des télescopages grâce à $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

25 Par décomposition $F(X) = \dfrac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$ en éléments simples.

Réponse à trouver : $\quad F(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{X+k}$

Le résultat s'obtient formellement en replaçant $\dfrac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}$ à l'aide de la DES puis en intervertissant les sommes triangulaires (SF 6).

Justifier le calcul a posteriori en montrant que la famille $\left(\dfrac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\dfrac{1}{z+k}\right)_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\ k\leq n}}$ est sommable : on obtient de même $\displaystyle\sum_{\substack{k,n\in\mathbb{N}^*\\ k\leq n}} \frac{1}{k!(n-k)!}\frac{1}{|z+k|} = e\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!|z+k|}$. Justifier que le résultat est fini par exemple par critère d'équivalence.

26 $\sum w_n$ est le produit de Cauchy de $\sum \dfrac{1}{2^n}$ et de $\sum \dfrac{3^n}{n!}$.

27 Utiliser la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ pour faire apparaître un produit de Cauchy.

28 Procéder par récurrence sur p. Pour l'hérédité écrire :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+2}} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}} \times \frac{1}{1-z}$$

puis utiliser le théorème relatif à la convergence absolue du produit de Cauchy de $\sum \dbinom{n+p}{p} z^n$ et $\sum z^n$.

29 *N.B. Si on suppose $\sum b_n$* ***absolument*** *convergente, alors il s'agit d'une conséquence du théorème sur le produit de Cauchy. L'objet de l'exercice est de montrer de montrer que la convergence de la série $\sum c_n$ reste valable sans l'hypothèse de convergence absolue sur $\sum b_n$: c'est le théorème de* Mertens

Revenir aux sommes partielles. Poser pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n \quad \text{et} \quad C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$$

Il suffit de montrer que $C_N - A_N B_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Commencer par montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$C_N - A_N B_N = \sum_{k=0}^{N} a_k (B_{N-k} - B_N)$$

Revenir à la définition de la limite. Etant donné $\varepsilon > 0$, les hypothèses assurent l'existence de n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leq \varepsilon$$

Ensuite : $\quad |C_N - A_N B_N| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{N} |a_k||B_{N-k} - B_N|$.

Pour $N \geq 2n_0$, couper la somme en deux en l'indice $k = n_0$:

- Dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} |a_k||B_{N-k} - B_N|$, on peut majorer :
  - les $|B_{N-k} - B_N|$ par 2ε
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} |a_k|$ par une constante M.
- Dans $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{N} |a_k||B_{N-k} - B_N|$, on peut majorer :
  - les $|B_{N-k} - B_N|$ par une constante M'
  - puis $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{N} |a_k|$ par ε.