Notation. Pour tout $\alpha > 1$, on pose : $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation par paquets

1 SF 1 SF 2 Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier la sommabilité et calculer la somme de $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$.

2 SF 1 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, bijective et strictement croissante.
Montrer que $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.
Indication : considérer les ensembles $I_n = \{k \in \mathbb{N}^* \mid n < f(k) \leq n+1\}$.

3 SF 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ deux à deux distincts.
Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} k$.

2. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.
Montrer que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$ est divergente.
Indication : considérer les ensembles $I_n = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^n < k \leq 2^{n+1}\right\}$.

Sommes triangulaires

4 SF 6 Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

5 SF 6 Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est elle réelle ?

6 SF 6 Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, positive, telle que $\sum \alpha_n$ converge.
Pour tout entier $k \geq 1$, on pose : $u_k = k\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n(n+1)}$
Montrer que la série $\sum u_k$ converge et calculer sa somme.

7 SF 2 SF 6 Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle.
Pour tout $n \geq 1$, on pose : $\Delta_n = a_n - a_{n+1}$.
On suppose que la série $\sum \Delta_n \ln n$ converge absolument.
Montrer que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta_n H_n$
où : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8 SF 6 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$, positive, telle que $\sum \sqrt{n} a_n$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p^2$.
Montrer que la série $\sum \sqrt{\frac{w_n}{n}}$ converge.

Sommes « à $p+q$ constant »

9 SF 1 SF 7 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la sommabilité de :

a) $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ **b)** $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$

c) $\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ **d)** $\left(\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$

10 SF 2 SF 7 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.
Justifier l'existence et calculer : $\sum_{p,q\geq 0} \frac{a^p b^q}{(p+q)!}$

11 SF 2 SF 7 On admet :

$$\forall x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

Justifier l'existence et calculer : $\sum_{p,q\geq 0} \frac{(-1)^{p+q}}{2^p 3^q (p+q+1)}$

12 SF 4 SF 7 On souhaite établir : $\sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{pq^2+p^2q} = 2\zeta(3)$.

1. A l'aide d'une sommation par paquets, montrer que :

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{pq^2+p^2q} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} - 2\zeta(3)$$

2. A l'aide , du théorème de Fubini, montrer que :

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{pq^2+p^2q} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2}$$

puis conclure.

Découpages à base d'arithmétique

13 SF 2 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$

14 SF 5 On admet que : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.
Calculer :

a) $S_1 = \sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2}$ **b)** $S_2 = \sum_{\substack{p,q\geq 1 \\ p|q}} \frac{1}{p^2q^2}$ **c)** $S_3 = \sum_{\substack{p,q\geq 1 \\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}$

15 SF 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note :

- d_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
- s_n est la somme des diviseurs positifs de n.

1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$: $\left(\zeta(\alpha)\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^\alpha}$

2. Montrer que pour tout $\alpha > 2$: $\zeta(\alpha)\zeta(\alpha-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{n^\alpha}$

16 SF 1 SF 2 Soit $\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ telle que : $\lambda(1) = 1$, $\lambda(p) = -1$, pour tout nombre premier $p \in \mathbb{P}$ et $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(n) \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ converge absolument pour tout $x \in]-1, 1[$. On note $N(x)$ sa somme.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma(m) = \sum_{d|m} \lambda(d)$.

   Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$: $N(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sigma(m) x^m$
3. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$: $N(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

17 SF 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^k \text{ pour certains } p \in \mathbb{P} \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$
2. Montrer que pour tout $\alpha > 1$: $\zeta(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Lambda(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$
3. En déduire : $\sum_{p \in \mathbb{P}} \dfrac{\ln p}{p^\alpha} \underset{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}}{=} \dfrac{1}{\alpha - 1} + O(1)$.

Théorème de Fubini

18 SF 2 SF 4 Justifier l'existence et calculer : $\sum_{p,q \geq 2} \dfrac{(-1)^p}{q^p}$.

19 SF 2 SF 4 SF 7 Soit $z \in \mathbb{C}$. Etudier la sommabilité et, le cas échéant, calculer la somme de :

a) $\left(\dfrac{z^p}{q!}\right)_{p,q \geq 0}$ b) $\left(\dfrac{q^p z^p}{p! q!}\right)_{p,q \geq 0}$

c) $\left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{p,q \geq 0}$ d) $\left(\binom{p+q}{p} z^p\right)_{p,q \geq 0}$

20 SF 2 SF 4 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$.

1. On considérant la famille $\left(z^{p(2q-1)}\right)_{p,q \geq 1}$ établir :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{2p-1}}{1 - z^{2p-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1 - z^{2p}}$$

2. Etablir : $\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p z^{p+1}}{1 - z^{p+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{z^p}{1 + z^p}$.

21 SF 4 On admet : $\forall x \in]-1, 1]$, $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

On pose : $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n \right)$ (constante d'Euler).

a) Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma$

b) Montrer que : $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\zeta(n)}{n} = \gamma$

22 SF 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *partition multiplicative* de n toute liste $(d_1, \ldots, d_r)$ d'entiers tels que $1 < d_1 \leq \cdots \leq d_r$ pour laquelle $d_1 \ldots d_r = n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions multiplicatives de n.

1. Montrer que pour tout $s > 1$:

$$\frac{u_n}{n^s} = \sum_{\substack{\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N} \\ 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots n^{\alpha_n} = n}} \frac{1}{2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots n^{\alpha_n}}$$

2. En déduire que pour tout $s > 1$: $u_n = O(n^s)$.

Avec des décompositions en éléments simples

23 SF 4 Montrer que : $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(p + q^2)(p + q^2 + 1)} = \zeta(2)$.

24 SF 7 SF 6 Montrer que : $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{pq(p + q + 1)} = 2$.

25 SF 6 SF 2 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$.

Montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{z(z+1) \ldots (z+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$.

Produit de Cauchy

26 SF 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{6^k}{k!}$.

Montrer que la série $\sum w_n$ converge et calculer sa somme.

27 SF 9 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts tels que : $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

Etablir : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \dfrac{1}{1 - (a + b) + ab}$.

28 SF 8 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ converge absolument pour tout $p \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$$

29 On suppose $\sum a_n$ absolument convergente et $\sum b_n$ convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Montrer que $\sum c_n$ est convergente et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.