1

2 Exploiter notamment la propriété $\det(A^\top) = \det(A)$

3 **1.** En notant f l'endomorphisme canoniquement associé à A, il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \times \\ 0 & 0 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times \end{pmatrix}$$

(où les $\times$ désignent des coefficients quelconques).
Prendre une base $(b_1,\dots,b_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} f$, complétée en une base $(b_1,\dots,b_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

2. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}$ vérifier que $\det(I_n + B) = 1 + \operatorname{tr}(B)$.
L'égalité sur A en découle en utilisant l'exercice **??**

4 **1.** Factoriser $A^2 + tI_n = (A + i\sqrt{t}I_n)(A - i\sqrt{t}I_n)$

2. a) Posant $B = M + tI_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}}_{=p_\sigma(t)} \quad \text{où } b_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ m_{i,i} + t & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquer chaque fonction p_σ est polynomiale et :

- si $\sigma = \operatorname{Id}$ alors p_σ est de degré n
- si $\sigma \neq \operatorname{Id}$ alors p_σ est de degré inférieur à $n-1$

b) Procéder par l'absurde : si $-I_n = A^2 + B^2$, alors pour tout $t \in [0,1]$: $\quad -(A + tI_n) = B + (1-t)I_n$.
Prendre le déterminant de cette égalité et dénicher une contradiction avec les deux questions qui précèdent.

5 Deux méthodes sont possibles :

- *Méthode 1 : par linéarité selon les lignes et le colonnes.*

$$\det(B) = \begin{vmatrix} (-1)^{1+1}a_{1,1} & (-1)^{1+2}a_{1,2} & \dots & (-1)^{1+n}a_{1,n} \\ (-1)^{2+1}a_{2,1} & (-1)^{2+2}a_{2,2} & \dots & (-1)^{2+n}a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1}a_{n,1} & (-1)^{n+2}a_{n,2} & \dots & (-1)^{n+n}a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Factoriser :

- Toute la première colonne par $(-1)^1$
- Toute la deuxième colonne par $(-1)^2$
- ...
- Toute la dernière colonne par $(-1)^n$

Ce qui donne

$$\det B = (-1)^1 \times (-1)^2 \times \dots \times (-1)^n \begin{vmatrix} (-1)^1 a_{1,1} & (-1)^1 a_{1,2} & \dots & (-1)^1 a_{1,n} \\ (-1)^2 a_{2,1} & (-1)^2 a_{2,2} & \dots & (-1)^2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n a_{n,1} & (-1)^n a_{n,2} & \dots & (-1)^n a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Faire les même factorisations mais cette fois selon les lignes

- *Méthode 2 : avec* $\det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}$.

Remplacer $b_{\sigma(j),j} = (-1)^{\sigma(j)+j} a_{\sigma(j),j} = (-1)^{\sigma(j)}(-1)^j a_{\sigma(j),j}$

Séparer les produits en remarquant qu'après réindexation

$$\prod_{j=1}^{n} (-1)^{\sigma(j)} \underset{k=\sigma(j)}{=} \prod_{k=1}^{n} (-1)^k$$

on finit par trouver : $\det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = \det(A)$

6 Les colonnes sont liées : chaque colonne est une combinaison linéaire de : $\quad S = \begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$.

7 Procéder par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Si A convient en posant $r = \operatorname{rg} A$ on peut écrire $A = UJ_rV$ où $U, V \in GL_n(\mathbb{K})$. En prenant $X = UYV$ dans l'égalité puis en simplifiant par $\det(U)$ et $\det(V)$ constater que J_r doit vérifier
$$\forall Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(J_r + Y) = \det(Y)$$
Prendre alors $Y = I_n$ et calculer les déterminants.
L'égalité obtenue montre que nécessairement $r = 0$ *i.e.* A est nulle.
- *La synthèse n'est pas difficile.*

8 Montrer que

$$\varphi : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1},\dots,x_n)$$

est une forme n-linéaire alternée sur E.
Pat théorème ceci assurera que $\varphi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$ où λ est donné par $\lambda = \varphi(b_1,\dots,b_n)$.
Reste ensuite à montrer que $\varphi(b_1,\dots,b_n) = \operatorname{tr} f$.
Pour cela on peut calculer $\varphi(b_1,\dots,b_n)$ en décomposant chaque $f(b_k)$ dans la base $\mathscr{B}$ *i.e.* en écrivant

$$f(b_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_i \quad \text{où} \quad A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f$$

Le caractère alterné de $\det_{\mathscr{B}}$ assure que

$$\det_{\mathscr{B}}(b_1,\dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_i, \dots, b_n) = \det_{\mathscr{B}}(b_1,\dots, a_{k,k} b_k, \dots, b_n)$$

Avec la n-linéarité du déterminant on obtient

$$\varphi(b_1,\dots,b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(b_1,\dots,b_k,\dots,b_n)}_{=1} = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(f)$$

9 **1.** Les coefficients de M vérifient $m_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{si } j \geq i \\ a_{n+j-i} & \text{si } j < i \end{cases}$.
Calculer $(MV)_{i,j}$ à l'aide de la définition en coupant la somme en l'indice $k = i-1$ puis réindexer les deux sommes obtenues pour les mettre sous la forme $\sum a_\ell \dots$

2. Calculer $\det(MV)$ de deux façons :

- D'une part $\det(MV) = \det(M)\det(V)$
- D'autre part si on note $V = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ (écriture en colonnes) alors $MV = \big(P(1)C_1|P(\omega)C_2|\dots|P(\omega^{n-1})C_n\big)$.

10 **1.** $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ est de dimension $n-1$.

2. Vérifier qu'il s'agit en fait du déterminant de la famille $\big(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n-1)\big)$ dans la base

$\mathscr{B} = (L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ formée des polynômes de Lagrange associés aux points $1, \dots, n$.

11 M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
On trouve : $\det(M) = -(m+3)(m^2+m+1)$.

12 **1.** Utiliser $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ pour $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ puis opérer sur les colonnes.

2. a) Utiliser $\gamma = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}\right)}$ puis une formule de trigonométrie.

b) En notant $s = \alpha + \beta + \gamma$ et $p = \alpha\beta\gamma$, remarquer que α, β, γ sont les racines de $P(X) = X^3 - sX^2 + X - p$. Ceci assure que les colonnes sont liées dans le déterminant obtenu à la question 1.

13 On se ramène à des déterminants triangulaires par des opérations élémentaires (méthode du pivot).
Réponses à trouver :

a) $D = -ab(a+b)$ **b)** $D = (c-b)(b-a)(c-a)$
c) $D = (a+b+c)^3$ **d)** $D = a(a-b)^3$

14 *Réponse à trouver :* $\Delta = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abcV(a,b,c)$.
On peut par exemple commencer par l'opération
$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$$
puis utiliser la première colonne pour simplifier les autres.

15 L'identité $\omega^3 = 1$ assure que les colonnes sont liées : $C_2 = \omega^2 C_1$ et $C_3 = \omega C_1$. Le cours donne la valeur du déterminant sans calcul.

16 On se ramène à un déterminant triangulaire en faisant les opérations $L_n \longleftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \longleftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, puis ... puis enfin $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$.

17 Deux méthodes (au moins) sont possibles.

- *Méthode 1 : par opérations élémentaires.* Par échanges de colonnes, on se ramène à
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \dots \times a_n$$
Attention cependant : chaque échange de colonne multiplie le déterminant par -1 donc il s'agit de compter le nombre d'échange de colonnes. Distinguer les cas n pair et n impair
- *Méthode 2 : par récurrence en développant selon les lignes..* En notant $D(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant dont il est question et en développant selon la première ligne, on obtient
$$D(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n+1} a_n D(a_1, \dots, a_{n-1})$$

18 Noter $B = \lambda I_n - M$ puis utiliser la définition du déterminant
$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma(j),j}$$
Les variables $b_{\sigma(j),j}$ sont indépendantes donc
$$E(\det(B)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} E(b_{\sigma(j),j})$$
Autrement dit : $E(\det(\lambda I_n - M)) = \det(\lambda I_n - E(M))$
où $E(M) = (E(X_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice dont tous les coefficients valent m. On est ramené à un déterminant simple.

19 **a)** Deux méthodes (au moins) sont possibles.

- *Méthode 1 : par récurrence en développant selon les lignes..* En notant D_n le déterminant dont il est question et en développant selon L_2, on obtient $D_n = -1 + D_{n-1}$
- *Méthode 2 : par opérations élémentaires.* L'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - \dots - C_n$ transforme le déterminant en un déterminant triangulaire supérieur.

b) La somme des coefficients de chaque colonne est identique et vaut $n + x$. La méthode usuelle vue en cours s'applique dans ce cas :
Réponse finale : $x^{n-1}(n+x)$.

20 **1.** M_a est inversible ssi $\det(M_a) \neq 0$.
Il s'agit ainsi de calculer $\det(M_a)$.
Développer selon la première colonne :
$$\det(M_a) = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a \begin{vmatrix} a & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & a \end{vmatrix}$$
Les deux déterminants obtenus sont triangulaires.
Réponse finale : $\det(M_a) = (-1)^n(1-a^n)$
Ainsi M_a est inversible ssi $a^n \neq 1$ *i.e.* ssi $a \notin \mathbb{U}_n$

2. Avec la question 1 :

- si $a \notin \mathbb{U}_n$, M_a est inversible donc de rang n.
- si $a \in \mathbb{U}_n$ *i.e.* si $a^n = 1$ alors $\mathrm{rg} M_a \leq n-1$.
On peut envisager de montrer que $\mathrm{rg} M_a = n-1$.
Il suffit donc de montrer que $\mathrm{rg} M_a \geq n-1$.
Pour cela constater que la matrice extraite obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne est inversible.

21 Il s'agit de déterminants tridiagonaux : suivre la stratégie du savoir-faire SF 6

a) *Réponse à trouver :*

- si $x \neq \pm 1$: $D_n = \dfrac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2}$.
- si $x = \pm 1$: $D_n = n + 1$.

b) *Réponse à trouver :* $D_n = \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}$

22 **1.** Effectuer les opérations $C_j \longleftarrow C_j - C_1$ pour $j \geq 2$:
$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \dots & c-a & \\ b+x & a-b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-a \\ b+x & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$
Ne pas chercher à calculer le déterminant obtenu.
L'intérêt est que x n'apparaît que dans les coefficients de

la première colonne.
En développant par rapport à C_1 on obtient

$$f(x) = \underbrace{(a+x)\Delta_{1,1} + \sum_{i=2}^{n}(b+x)(-1)^{i+1}\Delta_{i,1}}_{\text{de la forme } mx+p} = mx+p$$

pour certaines constantes m et p

2. Avec la 1,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad mx+p = f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

Il suffit de trouver deux valeurs de x pour lesquelles on sait calculer le déterminant pour former un système d'inconnues m et p.
Les valeurs $x = -b$ et $x = -c$ donnent des déterminants triangulaires.
Réponse à trouver :

$$m = \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b} \quad \text{et} \quad p = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

23 On peut (entre autres) procéder par récurrence sur n.
Pour l'hérédité, la linéarité par rapport à la dernière colonne permet d'écrire

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_{n+1} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{D_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & a_{n+1} \end{vmatrix}}_{D_2}$$

- En effectuant $C_j \to C_j - C_n$ on trouve : $\quad D_1 = a_1 \dots a_n$
- En développant par rapport à C_n :

$$D_2 = a_{n+1}\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

24
- Faire d'abord les opérations : $L_{n+1} \longleftarrow L_{n+1} - L_n$, puis $L_n \longleftarrow L_n - L_{n-1}$ …, puis enfin $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ et simplifier les coefficients en utilisant la formule de Pascal $\binom{n+1}{p} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}$
- Développer par rapport à la première colonne.
- Faire ensuite les opérations : $C_n \longleftarrow C_n - C_{n-1}$, puis $C_{n-1} \longleftarrow C_{n-1} - C_{n-2}$ …, puis enfin $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$ et simplifier les coefficients en utilisant la formule de Pascal $\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1}$
- On obtient $D_n = D_{n-1}$.
- On en déduit que $D_n = D_1 = 1$.

25 **1.** Développer selon la dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1) \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -1 \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Développer le premier déterminant selon la dernière colonne pour obtenir la relation demandée.

2. Procéder par récurrence double sur n.

3.
- *Si* $(\Delta)_n$ *converge* alors la série $\sum a_n$ est majorée et à termes positifs.
- *Si* $\sum a_n$ *converge* alors cette série et majorée.
  Ceci permet de majorer (Δ_n) en utilisant $1 + a_k \leq e^{a_k}$.
  La relation de récurrence de la question a) permet de montrer que cette suite est par ailleurs croissante.

26 Procéder par récurrence sur n. Pour l'hérédité, développer par rapport à une ligne

27 Pour l'étape d'hérédité, si $x_1, \dots, x_n$ sont fixés tels que $M = \left(f_j(x_i)\right)$ est inversible considérer la fonction

$$D : x \mapsto \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x) & \dots & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}$$

Il s'agit de montrer que D n'est pas la fonction nulle. On peut par exemple procéder par l'absurde et développer D par rapport à la dernière ligne. On obtient une combinaison linéaire nulle de $(f_1, \dots, f_n)$ dont le coefficient de f_n vaut $\pm\det(M) \neq 0$.

28 L'indication de l'énoncé permet de se ramener à des déterminants triangulaires par blocs

29 Par opérations élémentaires on transforme $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$ (déterminant diagonal par bloc). Pour cela, commencer par soustraire le « bloc des n dernières colonnes » au « bloc des n premières colonnes » *i.e.* effectuer $C_1 \longleftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots C_n \longleftarrow C_n - C_{2n}$ ce qui donne $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix}$
il suffit alors de soustraire le « bloc des n premières lignes » au « bloc des n dernières lignes »

30 Utiliser : $\quad (\star) \quad A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \det(A) I_n$
- Si A est inversible $(\star)$ permet de trouver B telle que $B \times \mathrm{Com}(A)^\top = I_n$.
- Si $\mathrm{Com}(A)^\top$ est inversible, raisonner par l'absurde en supposant A non inversible.

31 **1. a)** Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors A possède une matrice extraite de taille $(n-1)$ qui est inversible

b) Se rappeler que si $A \times B = 0$ alors $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Ker}\, A$.

c) $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)^\top)$ et utiliser b) et a).

2. Si $\mathrm{rg}(A) < n-1$ alors A ne possède aucune matrice extraite de taille $(n-1)$ et inversible.

32 **a)** Prendre le déterminant de l'égalité

$$(\star) \quad A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \det(A) I_n$$

en utilisant les propriétés du déterminant.
On obtient : $\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

b) On cherche $\mathrm{Com}(M)$ où $M = \mathrm{Com}(A)$. Or

$$M \times \mathrm{Com}(M)^\top = \det(M) I_n$$

donc en transposant

$$\mathrm{Com}(M) \times M^\top = \det(M) I_n$$

33 **1.** Utiliser $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$.

2. Si $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ noter que :

- $\det(A) \in \mathbb{Z}$
- $\frac{1}{\det A} = \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$

Pour la réciproque utiliser $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}\, A^\top$ et justifier que :

- $\dfrac{1}{\det(A)}$ est entier
- $\mathrm{Com}(A)$ est à coefficients entiers.

34 Ecrire une relation de Bézout entre $\det(A)$ et $\det(B)$ et se rappeler que

$$\det(A) I_n = A \times \mathrm{Com}(A)^\top \quad \text{et} \quad \det(B) I_n = B \times \mathrm{Com}(B)^\top$$

35 **1.** Prendre le déterminant de l'égalité.

2. a) Prendre l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

b) Prendre l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \dots & \\ & & & A \end{pmatrix}$.

36 φ est une symétrie.