1

2 Calculer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x)$ pour $x \in [\![1,n]\!]$ en distinguant deux cas :

- $x = \sigma(a_i)$ pour un certain $i \in [\![1,p]\!]$
- $x \notin \{\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_p)\}$

3 **1.** Il suffit de le montrer pour une transposition. Essayer d'écrire (i,j) sous la forme : $(i,j) = (1,\bullet)\circ(1,\bullet)\circ(1,\bullet)$

2. Au vu du résultat de la question1, il suffit de le montrer pour une transposition de la forme $(1,i)$.

4 **1.** A_n est le noyau d'un morphisme de groupe.

2. a) Calculer $\varphi\circ\varphi$.

b) Observer que $\varphi(A_n) = S_n \setminus A_n$.

5 Si σ commute avec toutes les permutations de S_n, alors elle commute avec toute transposition (i,j).
Combiner ce constat avec l'égalité $\sigma\circ(i,j)\circ\sigma^{-1} = (\sigma(i),\sigma(j))$ pour montrer que $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

6 **1. a)** Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n :

$$P(A_i) = \frac{\overbrace{\text{nombre de permutations } s\in S_n \text{ telles que } s(i)=i}^{a}}{\text{nombre total de permutations de } S_n} = \frac{a}{n!}$$

Réponse à trouver : $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$.

De même : $P(A_i\cap A_j) = \dfrac{b}{n}$ où b est le nombre de permutations s telles que $s(i) = i$ et $s(j) = j$.

Réponse à trouver : $P(A_i\cap A_j) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

b) $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ et $X_iX_j = \mathbb{1}_{A_i\cap A_j}$ et on sait que $\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(p)$ où $p = P(A)$.

c) Utiliser $\operatorname{cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$ puis $E(X_iX_j)$, $E(X_i)$ et $E(X_j)$ sont connues avec **1b)**.

Réponse à trouver : $\operatorname{cov}(X_iX_j) = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$

2. a) N compte le nombre de points fixes : on sait exprimer une telle variable en fonction des indicatrices.

b)
- *Pour l'espérance.* Utiliser la linéarité de l'espérance.
- *Pour la variance.* Les X_i ne sont pas indépendantes donc on doit utiliser :

$$V(N) = \left(\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)\right)$$

Réponse à trouver : $V(N) = 1$

c) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à N.

7 N étant défini comme un maximum, l'événement $\{N\ge k\}$ est plus simple que $\{N = k\}$.
Utiliser $P(N = k) = P(N\ge k) - P(N\ge k+1)$.
Ensuite remarquer que pour $k\in[\![1,n]\!]$,

$$\{N\ge k\} = \{\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)\}$$

Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(N\ge k) = \dfrac{|A_k|}{|S_n|}$ où A_k est l'ensemble des permutations $s\in S_n$ telles que $s(1) < \cdots < s(k)$. Pour dénombrer A_k, former une permutations $s\in A_k$ revient à :

- Choisir dans $[\![1,n]\!]$ k valeurs $s(1),\dots,s(k)$ rangées par ordre strictement croissant.
- Puis choisir les valeurs de $s(k+1),\dots,s(n)$

Réponse à trouver : $P(N\ge k) = \dfrac{1}{k!}$.

8 **1.** Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(X = k) = \dfrac{|A_k|}{|S_n|}$ où A_k est l'ensemble des permutations $s\in S_n$ de la forme :

$$s = \underbrace{(x_1,\dots,x_k)}_{\text{tous distincts}} \circ \underbrace{\sigma'}_{\substack{\text{permutation de}\\ [\![1,n]\!]\setminus\{x_1,\dots,x_k\}}}$$

Pour dénombrer A_k, former une permutations $s\in A_k$ revient à :

- Choisir une partie de $[\![1,n]\!]$ à k éléments (le support du cycle de longueur k)
- Puis former un cycle $(x_1,\dots,x_k)$ de longueur k avec ces k-éléments
- Puis choisir une permutation σ' de $[\![1,n]\!]\setminus\{x_1,\dots,x_k\}$ (elle ne peut comporter de cycle de longueur supérieure à k puisque $k > n+2$)

2. $p_n = P\left(X\le \dfrac{n}{2}\right) = 1 - P\left(X > \dfrac{n}{2}\right)$.
Avec le résultat de **1.** on obtient : $p_n = 1 - H_n + H_{\lfloor n/2\rfloor}$.

9 En notant A_k l'événement « $\sigma(k) > \sigma(k+1)$ » : $D = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{1}_{A_k}$.

a) $E(D) = \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)$. Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(A_k) = \dfrac{a}{n!}$ où a est le nombre de permutations s telles que $s(k) > s(k+1)$.
On trouve $a = \dbinom{n}{2}(n-2)!$ puis $P(A_k) = \dfrac{1}{2}$.

b) $V(D) = \sum_{k=1}^{n-1} V(\mathbb{1}_{A_k}) + 2\sum_{1\le i<j\le n-1}\operatorname{cov}(\mathbb{1}_{A_i},\mathbb{1}_{A_j})$.

- $V(\mathbb{1}_{A_k})$ se calcule en notant que $\mathbb{1}_{A_k}\sim\mathscr{B}(\frac{1}{2})$
- $\operatorname{cov}(\mathbb{1}_{A_i},\mathbb{1}_{A_j}) = P(A_i\cap A_j) - P(A_i)P(A_j)$.
  Comme à la question précédente $P(A_i\cap A_j)$ se calcule en dénombrant les permutations qui possèdent une descente en i et en j :
  - Si $j = i+1$ il y en a $\binom{n}{3}(n-3)!$
  - Si $j > i+1$ il y en a $\binom{n}{4}(n-4)!$

  On obtient : $\operatorname{cov}(\mathbb{1}_{A_i},\mathbb{1}_{A_j}) = \begin{cases} -\frac{1}{12} & \text{si } j = i+1\\ 0 & \text{si } j > i+1\end{cases}$.

10 Puisque σ suit la loi uniforme sur S_n : $P(X = k) = \dfrac{|A_k|}{|S_n|}$ où A_k est l'ensemble des permutations $s\in S_n$ de la forme :

$$s = \underbrace{(1,x_1,\dots,x_{k-1})}_{\text{tous distincts}} \circ \underbrace{\sigma'}_{\substack{\text{permutation de}\\ [\![1,n]\!]\setminus\{1,x_1,\dots,x_{k-1}\}}}$$

Pour dénombrer A_k, former une permutations $s\in A_k$ revient à :

- Choisir $x_1\in[\![2,n]\!]$.
- Puis choisir $x_2\in[\![2,n]\!]\setminus\{x_1\}$
- …
- Puis choisir $x_k\in[\![2,n]\!]\setminus\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$
- Puis choisir une permutation σ' de $[\![1,n]\!]\setminus\{1,x_1,\dots,x_{k-1}\}$

11 **1.** Remarquer que $\mathbb{1}_{\{X_1=k\}}+\cdots+\mathbb{1}_{\{X_n=k\}}=kN_k$

Réponse : $\quad E(N_k)=\dfrac{1}{k}.$

2. Remarquer que $C=N_1+\cdots+N_n$

Réponse : $\quad E(C)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n.$

12 On peut procéder par récurrence sur n. Pour l'hérédité on peut écrire $\Sigma_{n+1}=\Sigma_n\circ(n+1,X_{n+1})$ en regardant Σ_n comme une permutation aléatoire de $[\![1\,,n+1]\!]$ qui fixe $n+1$.
Il s'agit de montrer :

$$\forall\sigma\in S_{n+1},\quad P(\Sigma_{n+1}=\sigma)=\frac{1}{(n+1)!}$$

Etant donnée $\sigma\in S_{n+1}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{X_{n+1}=k\}_{1\le k\le n+1}$ et l'indépendance des X_i :

$$P(\Sigma_{n+1}=\sigma)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}P\big(\Sigma_n=\sigma\circ(n+1,k)\big)$$

Noter alors que dans la somme :

- Si $\sigma(k)\neq n+1$ alors la permutation $\sigma'=\sigma\circ(n+1,k)$ ne fixe pas le point k donc $\{\Sigma_n=\sigma'\}$ est impossible.
- Si $\sigma(k)=n+1$ alors la permutation $\sigma'=\sigma\circ(n+1,k)$ fixe $n+1$ et peut-être considérée comme un élément de S_n

La somme se réduit au seul terme d'indice $k=\sigma^{-1}(n+1)$ qui vaut $\dfrac{1}{n!}$.

13 **1.** *Deux possibilités.*

- *Option 1 – Par le calcul des coefficients du produits*. En notant $P_\sigma=(a_{i,j})$ et $P_{\sigma'}=(b_{i,j})$ la définition du produit donne $(P_\sigma P_{\sigma'})_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$.
  Avec la définition des $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$, constater que la somme est nulle sauf si $a_{i,k}$ et $b_{k,j}$ valent 1 pour le même indice k ce qui est le cas si et seulement si $k=\sigma'\big(\sigma(i)\big)$.
- *Option 2 – Par les endomorphismes canoniquement associés*. L'endomorphisme f_σ canoniquement associé à une permutation quelconque $\sigma\in S_n$ est caractérisé par
  $$\forall j\in[\![1\,,n]\!],\quad f_\sigma(e_j)=e_{\sigma(j)}$$
  où $(e_1,\ldots,e_n)$ est la base canonique de $[\![1\,,n]\!]$.
  Il suffit alors de comparer $f_\sigma\circ f_{\sigma'}(e_i)$ et $f_{\sigma\circ\sigma'}(e_i)$ pour tout $i\in[\![1\,,n]\!]$.

2. Commencer par montrer que dans le cas d'une transposition $\tau=(k,\ell)$: $\quad\det(P_\tau)=-1$.
Pour cela remarquer que la matrice P_τ est très simple.
Utiliser ensuite le fait que toute permutation σ est une composée de transposition et le résultat de la question 1.

14 **1.** Noter que : $\quad T^2=\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)P_\sigma T$

Ensuite, pour $\sigma\in S_n$ fixée, calculer le produit : $\varepsilon(\sigma)P_\sigma T=\displaystyle\sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')P_\sigma P_{\sigma'}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma\circ\sigma')P_{\sigma\circ\sigma'}$ en réindexant la somme via « $s=\sigma\circ\sigma'$ ».

2. Noter que $\mathrm{tr}(P_\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ :

$$\mathrm{tr}(P_\sigma)=\mathrm{Card}\,\mathrm{Inv}(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathrm{Inv}(\sigma)}(k)$$

En intervertissant les sommes on obtient

$$\mathrm{tr}(T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(k)=k}}\varepsilon(\sigma)$$

Ensuite, pour $k\in[\![1\,,n]\!]$ fixé, se donner $\sigma\in S_n$ telle que $\sigma(k)=k$ revient à se donner sa restriction s à $[\![1\,,n-1]\!]\setminus\{k\}$, et $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(s)$.
Par conséquent : $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(k)=k}}\varepsilon(\sigma)=\sum_{s\in S_{n-1}}\varepsilon(s)$.

Remarquer alors que cette dernière somme est nulle car les permutations de signatures $+1$ et -1 sont en même nombre (exercice 4).

Conclure en observant que $A=\dfrac{1}{n!}T$ est un projecteur de trace nulle et en utilisant le lien entre la trace et le rang pour les projecteurs.