Décompositions d'une permutation

1 SF 1 Dans chaque cas, écrire la permutation σ comme une composée de cycles disjoints et calculer sa signature.

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\sigma = (1,3,4) \circ (2,4,3,1) \circ (2,3)$ (dans S_4)

2 Soit $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_p \in [\![1,p]\!]$, distincts ($p \geq 2$). On pose $c = (a_1, \dots, a_p)$. Pour toute $\sigma \in S_n$ exprimer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ comme un p-cycle à expliciter.

3 SF 2 Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer que toute permutation de $[\![1,n]\!]$ peut s'écrire comme une composée de transpositions de la forme $(1,i)$ avec $i \in [\![2,n]\!]$. *Indication : Remarquer qu'il suffit de le montrer pour une transposition.*
2. Montrer que toute permutation de $[\![1,n]\!]$ peut s'écrire comme une composée de transpositions de la forme $(i, i+1)$ avec $i \in [\![1,n-1]\!]$.

4 Soit $n \geq 2$.
Une permutation $\sigma \in S_n$ est dite *paire* lorsque $\varepsilon(\sigma) = 1$.
On note A_n l'ensemble des permutations paires de S_n.

1. Montrer que A_n est une sous-groupe de S_n.
2. a) Soit τ une transposition de S_n.
Montrer que $\varphi : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n sur lui-même.
   b) En déduire le cardinal de A_n.

5 SF 2 Soit $n \geq 3$. Montrer que Id est la seule permutation qui commute avec tous les éléments de S_n.

Permutations et probabilités

6 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement $A_i = \{\sigma(i) = i\}$. On note enfin N le nombre de points fixes de σ.

1. Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ distincts.
   a) Calculer $P(A_i)$ et $P(A_i \cap A_j)$
   b) En déduire la loi de X_i et $X_i X_j$
   c) Calculer $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$
2. a) Exprimer N en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et en déduire $E(N)$ et $V(N)$.
   b) Montrer que : $P(N \geq 4) \leq \dfrac{1}{9}$.

7 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note N le plus grand entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$. Déterminer la loi de N.

8 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note X la longueur du plus grand cycle apparaissant dans la décomposition de σ en cycles disjoints.

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $k > \dfrac{n}{2}$. Montrer que $P(X = k) = \dfrac{1}{k}$.
2. On note p_n la probabilité que σ n'ait aucun cycle de longueur strictement supérieure à $\dfrac{n}{2}$ dans sa décomposition en cycles disjoints. Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \ln 2$.

9 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ on dit que D possède une *descente* en k lorsque $\sigma(k) > \sigma(k+1)$. On note D le nombre de descentes de σ.
Montrer que : **a)** $E(D) = \dfrac{n-1}{2}$. **b)** $V(D) = \dfrac{n+1}{12}$.

10 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note X la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît dans la décomposition de σ en cycles disjoints. Montrer que $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

11 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note N_k le nombre de cycles de longueur k apparaissant dans la décomposition de σ en cycles disjoints (en comptant les points fixes comme des cycles de longueur 1) et on note C le nombre total de cycles de σ.

1. Calculer $E(N_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. *Indication : on pourra librement utiliser le fait que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la variable aléatoire X_i qui donne la longueur du cycle dans lequel i apparaît dans la décomposition de σ suit la loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$ (voir exercice précédent)*
2. En déduire un équivalent de $E(C)$ lorsque n tend vers $+\infty$

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, et telles que $X_i \sim \mathscr{U}([\![1,i]\!])$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
On pose : $\Sigma_n = (1, X_1) \circ (2, X_2) \circ \dots \circ (n, X_n)$.
Montrer que $\Sigma_n \sim \mathscr{U}(S_n)$.

Matrices de permutations

13 SF 2 SF 4 Soit $n \geq 2$. A toute $\sigma \in S_n$ on associe la *matrice de permutation* $P_\sigma = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients définis pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ par $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que pour toutes $\sigma, \sigma' \in S_n$: $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$
2. Montrer que : $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ pour toute $\sigma \in S_n$.

14 SF 2 SF 4 Soit $n \geq 3$. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$ on définit la matrice de permutation P_σ comme à l'exercice 13.
On pose : $T = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) P_\sigma$.

1. Démontrer que : $T^2 = n! T$.
2. Calculer $\operatorname{tr}(T)$ puis montrer que $T = 0$.