1 Concernant la séparation, pour pouvoir dire que f est nulle sur $[-1,1]$ il y a un théorème à appliquer.

2 Symétrie, bilinéarité et positivité ne posent pas problème.

Séparation : si $(f \mid f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f')^2 = 0$.

Pour pouvoir dire que f' est nulle sur $[0,1]$ il y a un théorème à appliquer. Reste ensuite à montrer que f est nulle.

3 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$:
$$\left(\int_0^1 gh\right)^2 \leq \int_0^1 g^2 \times \int_0^1 h^2$$
en choisissant judicieusement les fonctions g et h.

4 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$:
$$\left(\sum_{k=0}^n x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=0}^n x_k^2 \times \sum_{k=0}^n y_k^2$$
en choisissant judicieusement les réels $x_k =$ et y_k.

5 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$

6 Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

7 Les hypothèses sur f permettent d'écrire : $f(t) = \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $f^2(t) \leq t\int_0^1 f'^2$.

On conclut par croissance de l'intégrale.

8 **1.** Par bilinéarité : $\|\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j\left(e_i \mid e_j\right)$

En appliquant judicieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ (pour majorer les sommes-doubles)
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j\left(e_i \mid e_j\right) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i^2\left|\left(e_i \mid e_j\right)\right|\right)^{\frac12}}_{=\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 s_i\right)^{1/2}}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_j^2\left|\left(e_i \mid e_j\right)\right|\right)^{\frac12}}_{=\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 s_j\right)^{1/2}}$$

2. a) Ecrire $\sum_{k=1}^n \lambda_k (x \mid e_k)$ sous la forme $(x \mid \bullet)$

Appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy Schwarz avec le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ puis la question **1.**.

b) Prendre $\lambda_k = \frac{(x|e_k)}{s_k}$ dans **2a)**.

9 Par bilinéarité : $N = \|\sum_{i=1}^n X_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_i X_j\left(e_i \mid e_j\right)$

Utiliser ensuite la linéarité de l'espérance puis calculer $E(X_iX_j)$ en distinguant les indices $i \neq j$ et les indices $i = j$.

10 **1.** Appliquer $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x \mid e_k)^2$ avec $x = e_i$.

2. Il suffit de montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est génératrice de E (elle est déjà libre). Poser $F = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$ et montrer que $F^\perp = \{0\}$ puis justifier en quoi ceci assure que $F = E$.

11 **a)** Utiliser : $\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2\left(e_i \mid e_j\right)$

b) La famille est de cardinal $n = \dim E$ donc la liberté suffit. Etant donnés $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$, on peut former un système de n équations en considérant les produits scalaires avec $e_1,\ldots,e_n$ *i.e.* en écrivant
$$\forall j \in [\![1,n]\!],\quad 0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mid e_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\left(e_i \mid e_j\right)}_{\substack{\frac12 \text{si } i\neq j\\ 1 \text{si } i=j}}$$
En sommant les n équations on obtient $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$. En utilisant alors cette dernière égalité dans chaque équation on obtient $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \ldots, \alpha_n = 0$.

12 **1.** Développer $\|x\|^2$ et $\|y\|^2$ par bilinéarité

2. La question **1.** assure que si $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i = 0$

Prendre le produit scalaire avec e_p.

13
- Si u et v sont orthogonaux utiliser l'égalité de Pythagore
- Pour la réciproque, deux possibilités (au moins) :
  - *Option 1*. Par contraposition, supposant que $(u \mid v) \neq 0$, on peut trouver t tel que $\|u + tv\| < \|u\|$.
    Pour cela, chercher t tel que $u + tv \perp v$ puis utiliser l'égalité de Pythagore (si la projection sur un hyperplan a déjà été traitée en cours, il suffit de prendre t tel que $u + tv = p_H(u)$ où $H = \mathrm{Vect}(v)^\perp$).
  - *Option 2*. Supposer : $\forall t \in \mathbb{R},\quad \|u + tv\|^2 \geq \|u\|^2$.
    Développer avec l'identité remarquable, simplifier puis diviser l'inégalité par $t > 0$ ou par $t < 0$ puis faire enfin tendre t vers 0^+ et vers 0^-.

14
- $i) \implies ii)$ Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$: $a_{i,j} \underset{\text{SF 6}}{=} \left(f(e_j) \mid e_i\right)$.
- $ii) \implies i)$ Le produit scalaire s'exprime matriciellement : si X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et Y celle de y alors : $(f(x) \mid y) = (AX)^\top Y$.
  Utiliser $ii)$ pour montrer que $(f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

15 En notant $\mathscr{B}' = (b_1',\ldots,b_n')$ et en utilisant :
- Le fait que $a_{i,j}$ est la i^{e} coordonnée de b_j' dans $\mathscr{B}$
- Le formulaire donnant l'expression du produit scalaire en base orthonormée

on obtient : $(A^\top A)_{i,j} = \left(b_i' \mid b_j'\right)$

16 **1.** Calculer $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$ par identité remarquable.

2. Ecrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ puis exprimer $\|f(x)\|^2$.

17 **1.** Utiliser :
$$(f(x) \mid f(y)) = \frac{-1}{2}\left(\|f(x) - f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$$

2. a) Développer et utiliser **1.**

b) Montrer que $(\delta \mid \delta) = 0$.

18 **1.** Introduire une base orthonormée $(e_1,\ldots,e_n)$ de E.

Dans une telle base montrer que la matrice A de f a pour coefficients $a_{i,j} = \left(f(e_j) \mid e_i\right)$.

Ainsi l'hypothèse est : $0 = \mathrm{tr} f = \sum_{i=1}^n \left(f(e_i) \mid e_i\right)$

- Si $n = 1$, c'est le résultat voulu

- Si $n \geq 2$, il existe $i \neq j$ tels que $(f(e_i) \mid e_i) \geq 0$ et $\big(f(e_j) \mid e_j\big) \leq 0$. On peut utiliser ces deux vecteurs pour construire un vecteur x tel que : $(f(x) \mid x) = 0$.
  Poser $x_t = (1-t)e_i + te_j$ pour tout $t \in [0,1]$ de sorte que $x_0 = e_i$ et $x_1 = e_j$ et justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto (f(x_t) \mid x_t)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annule.

2. Pour l'hérédité si le résultat est vrai en dimension n, en dimension $n+1$ utiliser la question 1 pour construire un vecteur e_1 de norme 1 tel que $(f(e_1) \mid e_1) = 0$. Compléter (e_1) avec une famille de n vecteurs $\mathscr{B}' = (e_2, \ldots, e_n)$ en une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E.
La matrice A de f dans cette base est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & A' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \operatorname{tr} A' = 0$$
Il suffit d'appliquer l'h.r. à f' tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'} f' = A'$

19 **1.** Utiliser : $0 = (f(x+y) \mid x+y)$.

2. Procéder par inclusion-dimension.

20 **a)** Fait en cours (partie II)

b) Procéder par double inclusion.

- Fixer $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Montrer que $x \in (F+G)^\perp$ revient à montrer : $\forall z \in F+G, \quad (x \mid z) = 0$
- Fixer $x \in (F+G)^\perp$.
  Il s'agit de montrer que $x \in F^\perp$ et que $x \in G^\perp$.
  Montrer que $x \in F^\perp$ revient à montrer :
  $$\forall a \in F, \quad (x \mid a) = 0$$

c) Appliquer b) à $F^\perp$ et $G^\perp$ puis utiliser a).

21 **1.** Symétrie, bilinéarité et positivité ne posent pas problème. Pour la séparation : il y a deux théorèmes à utiliser (l'un sur les intégrales, l'autre sur les polynômes).

2. Appliquer la méthode standard du savoir-faire SF 7
Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$:
$$P \in \big(\mathbb{R}_1[X]\big)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (P \mid 1) = 0 \\ (P \mid X) = 0 \end{cases}$$
Calculer ensuite les deux produits scalaires en fonction de a, b et c à l'aide de l'expression de $(P \mid Q)$ donnée par l'énoncé. On trouve
$$\big(\mathbb{R}_1[X]\big)^\perp = \operatorname{Vect}\Big(-\frac{3}{2}X^2 + X\Big) = \operatorname{Vect}\Big(-3X^2 + 2X\Big)$$

3. $P_3 = -3X^2 + 2X$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}_1[X]$. Il suffit de trouver une base orthogonale (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$: (P_1, P_2, P_3) sera une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. Construire (P_1, P_2) de « proche en proche » :

- Choisir arbtrairement $P_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ non nul (et simple !)
- Trouver ensuite $P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $0 = (P_1 \mid P_2)$.

22 **1.**

2. a) Utiliser la caractérisation de la multiplicité des racines des polynômes à l'aide des dérivées.

b) Effectuer une succession d'intégration par parties en utilisant la question précédente pour le crochet.

3. Avec la **3b)**, montrer que $(P_k \mid P_i) = 0$ lorsque $0 \leq i < k \leq n$ (observer le degré de P_i).

4. Il suffit de prendre la famille des $\dfrac{P_k}{\|P_k\|}$ donc de calculer $\|P_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, utiliser la **3a)** avec $Q = P_k$ en remarquant que $P_k^{(k)}$ est une constante. On obtient $\|P_k\|^2 = (-1)^k (2k)! \displaystyle\int_{-1}^{1} (t-1)^k (t+1)^k \, dt$.
On peut calculer l'intégrale en effectuant une succession d'intégration par parties.
On obtient : $\quad \|P\|_k^2 = \dfrac{(k!)^2}{2k+1} 2^{2k+1}$.

23 Appliquer la méthode standard du savoir-faire SF 7 :

- Ecrire F sous la forme $F = \operatorname{Vect}(I_2, B)$ avec $B = \ldots$.
- Pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : M \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (M \mid I_2) = 0 \\ (M \mid B) = 0 \end{cases}$

24 **1.** Déjà fait en exercice dans le chapitre Dimension.
Fixer $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (S, A) tel que $\begin{cases} S + A = M \\ S \in \mathscr{S}_n \\ A \in \mathscr{A}_n \end{cases}$
On obtient $S = \dfrac{M + M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^\top}{2}$

2. Raisonner par inclusion-dimension :

- Montrer que $\mathscr{S}_n \subset (\mathscr{A}_n)^\perp$. Pour cela fixer $S \in \mathscr{S}_n$. Il s'agit de montrer que $S \in (\mathscr{A}_n)^\perp$ *i.e.* que :
  $$\forall A \in \mathscr{A}_n, \quad (S \mid A) = 0$$
- Montrer que $\dim \mathscr{A}_n = \dim\big((\mathscr{S}_n)^\perp\big)$

3. Utiliser : $\quad A - S = \underbrace{\big(A - A_s\big)}_{\in \mathscr{A}_n = (\mathscr{S}_n)^\perp} + \underbrace{\big(A_s - S\big)}_{\in \mathscr{S}_n}$ et Pythagore.

25
- Ecrire F sous forme de Vect (résoudre l'équa diff), on trouve $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$ où $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.
- Ensuite, pour toute $f \in E : f \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (f \mid f_1) = 0 \\ (f \mid f_2) = 0 \end{cases}$

On obtient : $(f \mid f_1) = ef(1) - f(0)$ et $(f \mid f_2) = -\frac{1}{e} f(1) + f(0)$
En résolvant le système : $\quad f \in F^\perp \Leftrightarrow f(0) = f(1) = 0$.

26 Il suffit de montrer que $H^\perp \subset \{0\}$.
Fixer $g \in H^\perp$ et utiliser la fonction $f : t \mapsto tg(t)$.

27 Transformer $(1, X, X^2)$ en une famille orthonormée (P_0, P_1, P_2) par l'algorithme de Gram-Schmidt.
Réponses à trouver : $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{X-1}{\sqrt{2}} \quad$ et $\quad (X^2 - 2X + \frac{1}{3})\sqrt{\frac{3}{2}}$

28 On note $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit de calculer : $\quad p_F(b_1), \quad p_F(b_2) \quad$ et $\quad p_F(b_3)$.

- *Méthode 1* On trouve une base orthonormée (e_1, e_2) de F puis on utilise :
  $(\star) \quad p_F(u) = (u \mid e_1)e_1 + (u \mid e_2)e_2$ pour $u = b_1$, b_2 puis b_3.
  Pour trouver (e_1, e_2) on construit d'abord une famille (u_1, u_2) orthogonale. On prend (par exemple) $u_1 = (1, 0, 1)$, qui appartient à F. On cherche ensuite $u_2 = (x, y, z)$ tel que : $\begin{cases} u_2 \in F \\ (u_2 \mid u_1) = 0 \end{cases}$. Une base orthonormée de F est (e_1, e_2) où $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ et $e_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$
- *Méthode 2* On utilise le fait que Fest un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. On trouve un vecteur normal a à F puis
  $(\star\star) \quad p_F(u) = u - \dfrac{(u \mid a)}{\|a\|^2} a$ pour $u = b_1$, b_2 puis b_3.

29 On peut ici appliquer les méthodes 1 et 3 de SF 9 :

- *Avec la méthode 1*. Utiliser une formule de trigo pour écrire $\sin^2 = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F^\perp$ d'où $p_F(u) = f$
- *Avec la méthode 3*. On trouve : $(f_1 \mid f_2) = 0$.
La famille (f_1, f_2) est donc une base orthogonale de F.
Une base orthonormée est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ et $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$.
Pour calculer $\|f_1\|$: $\|f_1\|^2 = (f_1 \mid f_1) = \int_0^{2\pi} f_1^2(t)\,\mathrm{d}t$
On trouve : $\|f_1\| = \|f_2\| = \pi$ donc $e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{\pi}}$ et $e_2 = \frac{f_2}{\sqrt{\pi}}$.
Muni d'une base orthonormée :
$(\star)$ $p_F(u) = (u \mid e_1)e_1 + (u \mid e_2)e_2 = \frac{1}{\pi}(u \mid f_1)f_1 + \frac{1}{\pi}(u \mid f_2)f_2$
Reste à calculer $(u \mid f_1)$ et $(u \mid f_1)$. Ce sont deux intégrales : la première est simple, linéariser pour la deuxième.

30 *N.B. Il s'agit de la suite de l'exercice 23 dont on peut utiliser le résultat :* $F^\perp = \mathrm{Vect}(U, V)$ *où* $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut ici appliquer les méthodes 1 et 3 de SF 9 :

- *Avec la méthode 1*. On devine la décomposition selon $F \oplus F^\perp$.
- *Avec la méthode 3*. Montrer que la base (U, V) de $F^\perp$ est orthogonale Une base orthonormée est (E_1, E_2) où $E_1 = \frac{U}{\|U\|}$ et $E_2 = \frac{V}{\|V\|}$. On trouve $\|U\| = \|V\| = \sqrt{2}$ donc
$$p_{F^\perp}(J) = (J \mid E_1)E_1 + (J \mid E_2)E_2 = \frac{1}{2}(J \mid U)U + \frac{1}{2}(J \mid V)V$$
Reste alors à calculer $(J \mid U)$ et $(J \mid V)$.

31 Les questions reposent sur les deux conditions :
① $p_F(x) \in F$ et ② $x - p_F(x) \in F^\perp$

1. Ecrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et utiliser le théorème de Pythagore pour calculer $\|x\|^2$.
2. Poser $G = \{x \in F \mid \|p_F(x)\| = \|x\|\}$ et montrer que $F = G$ par double-inclusion.
3. Exploiter les conditions ① et ②, par exemple
$(p_F(x) \mid y) \underset{y = p_F(y) + y - p_F(y)}{=} (p_F(x) \mid p_F(y)) + (p_F(x) \mid y - p_F(y))$

32 Introduire une base orthonormée $(b_1, \dots, b_k)$ de F. La formule donnant le projeté dans une base orthonormée puis celle y donnant la norme permettent d'écrire :
$\|p_F(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(e_i \mid b_j\right)^2$. Ceci exprime $\sum_{i=1}^{n} \|p_F(e_i)\|^2$ comme une somme-double. Intervertir les $\sum$ et noter que la somme intérieure vaut $\|b_j\|^2$

33

Rappel : produit scalaire matriciel

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le produit scalaire se calcule simplement, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$, $\begin{cases} (A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd' \\ \|A\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{cases}$

Plusieurs méthodes sont possibles :

- $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p_F(A)\|$ donc il s'agit de déterminer $p_F(A)$.
Ici la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est une b.o.n de F donc :
$p_F(A) = (A \mid E_{1,1})E_{1,1} + (A \mid E_{1,2})E_{1,2} + (A \mid E_{2,2})E_{2,2}$
Le calcul des produits scalaires donne $p_F(A) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$
Puis on forme $A - p_F(A) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$ et on calcule $\|A - p_F(A)\|$.
- On peut procéder différemment pour déterminer $p_F(A)$ en devinant la décomposition de $A = M + N$ selon $F \oplus F^\perp$. Ensuite : $\mathrm{d}(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \|N\|$
- F est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{d}(A, F) = \frac{|(A \mid E)|}{\|E\|}$
où E est un vecteur normal à F.
Il s'agit donc d'abord de trouver un tel vecteur normal *i.e.* une matrice E orthogonale à toutes les matrices triangulaires supérieures.Ensuite on calcule $(A \mid E)$ et $\|E\|$.

34 Par définition $\mathrm{d}(M, \mathcal{S}) = \|M - p_{\mathcal{S}}(M)\|$.
Il s'agit donc de déterminer $p_{\mathcal{S}}(M)$. Ici on peut utiliser la méthode 1 car on connaît la décomposition d'une matrice dans $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ c'est : $M = \underbrace{\frac{M + M^\top}{2}}_{S \in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{M - M^\top}{2}}_{A \in \mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp}$
Cette décomposition assure (sans calcul) que $p_{\mathcal{S}}(M) = S$ et : $\mathrm{d}(M, \mathcal{S}) = \|M - S\| = \|A\|$. Il suffit donc de calculer $\|A\|$.

35

Calcul des produits scalaires

Dans cet exercice $(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ et $\|P\|^2 = (P \mid P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2$

On a : $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - P\|$, où $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)$.
•*Calcul du projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.*
Utiliser la méthode 2 du savoir-faire SF 9

- $P = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]$ donc il s'écrit : $P = aX + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$ à trouver
- $X^2 - P \in \left(\mathbb{R}_1[X]\right)^\perp$ donc P vérifie :
$\begin{cases} \left(X^2 - P \mid 1\right) = 0 \\ \left(X^2 - P \mid X\right) = 0 \end{cases}$ *i.e.* : $(\star)$ $\begin{cases} (P \mid 1) = \left(X^2 \mid 1\right) \\ (P \mid X) = \left(X^2 \mid X\right) \end{cases}$
Le calcul des quatre produits scalaire donne un système de deux équations sur a et b.

•*Calcul de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.* Calculer le polynôme $Q = X^2 - P$ puis $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - P\| = \|Q\|$

36

Calcul des produits scalaires

Ici un calcul de produit scalaire est un calcul d'intégrale :
$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|f\|^2 = (f \mid f) = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

1. Pour calculer $g = p_F(f)$, utiliser la méthode 2 de SF 9 :
   i) $g \in F$ donc $g = af_1 + bf_2$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ à trouver.
   ii) $f - g \in F^\perp$
   donc $\begin{cases} (f - g \mid f_1) = 0 \\ (f - g \mid f_2) = 0 \end{cases}$ *i.e.* $(\star)$: $\begin{cases} (g \mid f_1) = (f \mid f_1) \\ (g \mid f_2) = (f \mid f_2) \end{cases}$.
   On trouve :
   $(f \mid f_1) = e - 1 \quad (f \mid f_2) \underset{\text{IPP}}{=} 1 \quad (g \mid f_1) = a + \frac{b}{2} \quad (g \mid f_2) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$
   Résoudre enfin le sytème.
   On trouve $a = 4e - 10$ et $b = 18 - 6e$.
2. Remarque que $I(a, b) = \|f - (af_1 - bf_2)\|^2$. Par le théorème d'approximation $I(a, b)$ est minimale pour $af_1 - bf_2 = p_F(f)$ donc pour les valeurs trouvées à la **1.**.
3. Il s'agit de calculer l'intégrale $I(a, b) = \int_0^1 (e^t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$
On peut faire un calcul « brutal » en développant le carré

puis en calculant 6 intégrales.
On peut aussi être astucieux en utilisant

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \|f - p_F(f)\| = (f - p_F(f) \mid f - p_F(f)) \\ &= (f \mid f - p_F(f)) - \underbrace{\boxed{(p_F(f) \mid f - p_F(f))}}_{\text{Nul}} \\ &= (f \mid f - p_F(f)) - 0 \\ &= (f \mid f - af_1 - af_2) \end{aligned}$$

Cela donne
$I(a,b) = \int_0^1 e^t(e^t - a - bt) = \int_0^1 e^{2t}\,\mathrm{d}t - a\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t - b\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t$
et le calcul est plus simple.
On trouve après calcul des trois intégrales :

$$I(a,b) = \frac{e^2-1}{2} - a(e-1) - b$$

(où a et b sont les valeurs trouvées à la question 1).

37 Il s'agit d'interpréter le problème comme un problème de distance [1]. Concrètement il y a trois choses à faire :

- Définir l'espace vectoriel en jeu : l'énoncé propose $E = \mathbb{R}_n[X]$.
- Définir un produit scalaire sur E pour lequel $S(a,b)$ s'écrira comme une norme. On peut prendre $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ de sorte que $\|P-Q\|^2 = \sum_{k=0}^{n}\big(P(k)-Q(k)\big)^2$.
- Définir le sev F sur lequel on projette. Avec les définitions précédentes $S(a,b) = \|X^2 - \underbrace{(aX+b)}_{\text{décrit } \mathbb{R}_1[X]}\|^2$

  Donc on prend $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Par le théorème d'approximation, $S(a,b) = \|X^2 - (aX+b)\|^2$ est minimale pour $aX + b = p_F(X^2)$.
Utiliser la méthode 2 du savoir-faire **SF 9** pour calculer $p_F(X^2)$ On trouve $a = n$ et $b = \frac{-n(n-1)}{6}$.

38 Il s'agit d'interpréter le problème comme un problème de distance Concrètement il y a trois choses à faire :

- Définir l'espace vectoriel en jeu : ici l'énoncé propose $E = \mathscr{C}\big([0,2\pi],\mathbb{R}\big)$.
- Définir un produit scalaire sur E pour lequel $I(a,b)$ s'écrira comme une norme. Ici on prend le produit scalaire intégral $(f \mid g) = \int_0^{2\pi} fg$ de sorte que $\|f-g\|^2 = \int_0^{2\pi}(f-g)^2$.
- Définir le sev F sur lequel on projette. En notant f la fonction $t \mapsto t$ et f_1 la fonction $t \mapsto \sin t$ et $f_2 : t \mapsto \cos t$

  $$I(a,b) = \|f - \underbrace{(af_1 + bf_2)}_{\text{décrit Vect}(f_1,f_2)}\|^2$$

  Donc on prend $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

Par le théorème d'approximation $I(a,b) = \|f - (a\sin + b\cos)\|^2$ est minimale lorsque $a\sin + b\cos = p_F(f)$. Calculer $p_F(f)$ avec la méthode 3 de **SF 9** : on trouve $a = -2$ et $b = 0$.

39

Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Ici :$(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ et $\|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^\top A)$

H est le noyau de la forme linéaire $M \mapsto \mathrm{tr}M$.
Un vecteur normal se devine sur l'équation de H en écrivant : $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (\bullet \mid M) = 0\} =$
Utiliser la formule : $\mathrm{d}(J,H) = \dfrac{|(J \mid \bullet)|}{\|\bullet\|}$
Réponse à trouver : $\mathrm{d}(J,H) = \sqrt{n}$.

40 **a)** $\|A - \lambda I_n\|$ lorsque $\lambda I_n = p_F(A)$ où $F = \mathrm{Vect}(I_n)$.
Il s'agit de calculer le projeté de A sur F.
On peut utiliser la méthode 2 :

- $p_F(A) = \lambda I_n \in F$ a déjà été traduit.
- $(A - \lambda I_n \mid I_n) = 0$ donne avec la linéarité du produit scalaire : $\lambda = \frac{(A|I_n)}{(I_n|I_n)}$ qui donne le résultat demandé en calculant les deux produits scalaires.

b) Il s'agit de calculer $\|A - \lambda I_n\|^2$.
Pour cela on peut utiliser la ruse usuelle :
$\|A - \lambda I_n\|^2 = (A - \lambda I_n \mid A - \lambda I_n) = (A - \lambda I_n \mid A) - \underbrace{(A - \lambda I_n \mid \lambda I_n)}_{=?}$

1. c'est à dire arriver à écrire $S(a,b)$ sous la forme $\|x-y\|$ pour un certain vecteur x d'un e.v. E à trouver et y qui décrit un certain sous-ev de E.