Produit scalaire

1 SF 1 ★★★ Montrer que la relation $(f\mid g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$

2 SF 1 ★★★ Montrer que : $(f\mid g)=f(0)g(0)+\displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

3 SF 4 ★★★ Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}_+\big)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer : $\forall n,p\in\mathbb{N},\quad I_{n+p}^2\leq I_{2n}I_{2p}$

4 SF 4 ★★★ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}\leq\sqrt{2^n(n+1)}$.

5 ★★★ *Ex. 79.3, banque INP* SF 4

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}\sqrt{1-e^{-2}}$.

6 SF 4 ★★★ Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Montrer : $\displaystyle\frac{f(b)^2-f(a)^2}{2}\leq\sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\times\sqrt{\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$

7 SF 4 ★★★★ Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0)=0$.

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Calculs avec les produits scalaires

8 SF 2 SF 4 ★★★ Soit E un espace préhilbertien $x\in E$ et $e_1,\dots,e_n\in E$, non nuls. On pose $s_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|(e_k\mid e_i)|$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

1. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. Montrer : $\displaystyle\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\|^2\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 s_k$

   Indication : Appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

2. a) En déduire que pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x\mid e_k)\leq\|x\|\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 s_k\right)^{1/2}$$
   b) En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(x\mid e_k)^2}{s_k}\leq\|x\|^2$

9 SF 2 ★★★ Soit E un espace préhilbertien et $e_1,\dots,e_n\in E$, unitaires. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi définie pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ par : $P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\frac{1}{2}$.

On pose : $N=\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n}X_i e_i\right\|^2$. Montrer que : $E(N)=n$.

10 SF 5 ★★★ Soit E un espace préhilbertien et $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs unitaires de E vérifiant : $\forall x\in E,\quad \|x\|^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x\mid e_k)^2$

1. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est orthonormée.
2. Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. *Attention au départ rien n'indique que n est la dimension de E.*

11 SF 3 ★★★ Soit $n\geq 2$. Soit E un espace euclidien de dimension n et $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs unitaires de E. On suppose que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$: $\|e_i-e_j\|=1$.

a) Montrer que $\big(e_i\mid e_j\big)=\frac{1}{2}$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ distincts

b) Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

12 SF 2 ★★★ Soit E un espace euclidien et $e_1,\dots,e_p\in E$ vérifiant, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$: $\big(e_i\mid e_j\big)<0$.

1. Soient $x_1,\dots,x_p\in\mathbb{R}$. On pose $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}x_k e_k$ et $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}|x_k|e_k$
   Montrer que : $\|y\|\leq\|x\|$.
2. Montrer que $(e_1,\dots,e_{p-1})$ est libre.
   Que peut-on en déduire sur la dimension de E ?

13 SF 3 ★★★ Montrer que deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien E sont orthogonaux ssi : $\forall t\in\mathbb{R},\ \|u\|\ \leq\|u+tv\|$.

14 SF 6 ★★★ Soient E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $f\in\mathscr{L}(E)$. On pose : $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}f$.
Montrer l'équivalence entre :
i) $\forall x,y\in E,\quad (f(x)\mid y)=(x\mid f(y))$ *ii)* A est symétrique

15 SF 6 ★★★ Soient E un espace euclidien de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. On note A la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Montrer que : $A^{-1}=A^\top$.

16 SF 2 SF 3 ★★★ Soit E un espace euclidien et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall x,y\in E,\qquad (x\mid y)=0\implies\big(f(x)\mid f(y)\big)=0$$

1. Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.
   Montrer : $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \|f(e_i)\|=\|f(e_j)\|$
2. En déduire qu'il existe une constante $c\in\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x\in E$: $\|f(x)\|=c\,\|x\|$.

17 SF 3 ★★★ Soit E un espace euclidien et $f:E\to E$ telle que :
$f(0_E)=0_E$ et $\forall x,y\in E,\quad \|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$

1. Montrer que f conserve le produit scalaire *i.e.* :
$$\forall x,y\in E,\quad (f(x)\mid f(y))=(x\mid y)$$
2. a) Soient $x,y\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On pose
$$\delta=f(\lambda x+\mu y)-\lambda f(x)-\mu f(y)$$
   Montrer que pour tout $z\in E$: $(\delta\mid f(z))=0$.
   b) En déduire que f est linéaire.

18 SF 6 ★★★★ Soit E un espace euclidien de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{tr}(f)=0$.

1. Montrer qu'il existe $x\in E$ non nul tel que $(f(x)\mid x)=0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f à tous ses éléments diagonaux nuls. *Indication : Procéder par récurrence sur n.*

Orthogonal d'un sous-espace

19 SF 8 ★★★ Soit E un espace euclidien et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que
$$\forall x\in E,\quad (f(x)\mid x)=0$$

1. Etablir : $\forall x,y\in E,\quad (f(x)\mid y)=-(x\mid f(y))$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,f=(\mathrm{Ker}\,f)^\perp$.

20 ★★★ *Ex. 77, banque INP* SF 8 Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace euclidien E.

a) Montrer que : $(F^\perp)^\perp=F$.

b) Démontrer : $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.

c) En déduire que : $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.

21 SF 1 SF 5 SF 7 Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$(P \mid Q) = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)(1-t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.
3. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire. Comment obtenir une base orthonormale ?

22 SF 1 SF 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_k = (X^2-1)^k$ et $P_k = A_k^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que la relation : $\quad (P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer : $\quad \forall i \in [\![0, k-1]\!], \quad A_k^{(i)}(-1) = A_k^{(i)}(1) = 0$
   b) Etablir : $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P_k \mid Q) = (-1)^k \displaystyle\int_{-1}^1 A_k(t)Q^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale.
4. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

23 *Ex. 81.1, banque INP* SF 7 Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$ on pose : $\quad F = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
Déterminer une base de $F^\perp$.

24 *Ex. 92.2, banque INP* SF 8 On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n$ (matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n$ (matrices antisymétriques) sont supplémentaires.
2. Montrer que $\mathscr{A}_n = \left(\mathscr{S}_n\right)^\perp$.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$.
   Montrer que pour toute $S \in \mathscr{S}_n$: $\quad \|A - S\| \geq \|A - A_s\|$.

25 SF 7 On munit $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par la relation : $\quad (f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 \left(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\right)\mathrm{d}t$.

On pose : $\quad F = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
Démontrer que : $\quad F^\perp = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

26 On pose $E = \mathscr{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ et on munit E du produit scalaire défini par la relation : $\ (f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. $\quad$ Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Orthonormalisation de Schmidt

27 On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par la relation

$$(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

Avec l'algorithme de Schmidt, orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

Projection orthogonale

28 SF 9 SF 10 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on pose : $\ F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$.
Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique.

29 *Ex. 80, banque INP* SF 9 On munit $\mathscr{C}\left([0, 2\pi], \mathbb{R}\right)$ du produit scalaire défini par la relation : $\quad (f \mid g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

On note F le sous-espace engendré par les deux fonctions $f_1 : x \mapsto \cos x$ et $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

30 *Ex. 81.2, banque INP* SF 9 On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$ et on pose : $\quad F = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Trouver le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

31 Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p_F le projecteur orthogonal sur F.

1. Montrer que pour tout $x \in E$: $\quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
2. Montrer que : $\quad F = \{x \in E \mid \|p_F(x)\| = \|x\|\}$.
3. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\quad (p_F(x) \mid y) = (x \mid p_F(y))$

32 SF 6 SF 9 Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \|p_F(e_i)\|^2 = k$.

Distance à un sous-espace

33 *Ex. 82, banque INP* SF 9 SF 11 SF 12 On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$ et on pose : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer la distance de A au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

34 SF 9 SF 11 On munit $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on pose : $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M au sous-espace vectoriel $\mathscr{S}$ des matrices symétriques.

35 SF 9 SF 11 On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

36 SF 9 SF 11 On munit $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ où : $\quad f_1 : t \mapsto 1 \quad$ et $\quad f_2 : t \mapsto t$

1. Déterminer le projeté orthogonal de $f : t \mapsto e^t$ sur F.
2. En déduire les réels a, b qui rendent minimale l'intégrale
$$I(a, b) = \int_0^1 (e^t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$$
3. Calculer la valeur du minimum obtenu.

37 SF 9 SF 11 En introduisant un produit scalaire judicieux sur $\mathbb{R}_n[X]$, trouver les réels a, b qui rendent minimale la somme : $\quad S(a, b) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \left(k^2 - ak - b\right)^2$.

On pourra librement utiliser la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

38 SF 9 SF 11 Trouver les réels a, b qui minimisent l'intégrale

$$I(a, b) = \int_0^{2\pi} \left(t - a\sin t - b\cos t\right)^2\,\mathrm{d}t$$

Indication : Interpréter $I(a,b)$ comme une distance sur $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

39 SF 11 On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on pose $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Calculer la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1

40 SF 9 SF 11 On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A - \lambda I_n\|$ est minimale pour $\lambda = \dfrac{\mathrm{tr}A}{n}$ et que ce minimum vaut : $\quad \sqrt{\|A\|^2 - \dfrac{(\mathrm{tr}A)^2}{n}}$.