1

- On cerche : $p_n = P(X = Y)$ où
  - X est le nombre de pile du premier joueur.
  - Y est le nombre de pile du second joueur.
- X et Y sont indépendantes et suivent une loi usuelle
- *Calcul de* $P(X = Y)$

Technique à retenir : on « gèle » la variable Y

- *Très faux :* $P(X = Y) \cancel{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{Y}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est très faux
- *Très faux aussi :* $P(X = Y) \cancel{=} \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$ « parce que » Y est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$
- *La bonne écriture* Appliquer la formule des probabilités totales pour « geler » la variable Y

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P_{\{Y=k\}}(X=Y)P(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} P_{\{Y=k\}}(X=k)P(Y=k)$$

Il reste à :

- Remplacer $P(Y = k)$ qui est connue
- Calculer $P_{\{Y=k\}}(X = k)$ (utiliser l'indépendance)

- *Equivalent de* p_n : Utiliser la formule de Stirling.

2 Utiliser $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$
Ensuite calculer $P(X = Y)$ comme à l'exercice précédent en « gelant » Y (ou X peu importe) à l'aide de la formule des probabilité totales.

3 Noter A l'événement : « $X_1 \times \cdots \times X_n$ est pair »
Le produit est pair si l'un des X_i l'est : A est une réunion mais elle n'est pas incompatible. Remarquer que $\overline{A}$ peut s'écrire est l'événement : « Tous les X_i sont impairs. » comme une intersection indépendante à l'aide des événements I_i : « X_i est impair » pour $i \in [\![1,n]\!]$
On peut donc calculer les $P(I_i)$ puis $P(\overline{A})$.

4

1. Chercher les couples (x, y) d'entiers tels que $M^2 = M$.
On trouve deux couples solutions : $(0,1)$ et $(1,0)$.

2. On cherche $P(A)$ où A est lévénement :
« M représente un projecteur non nul »
Avec la question 1 :
$M^2 = M$ ssi le couple (X,Y) vaut $(0,1)$ ou $(1,0)$.
Traduire cette équivalence comme une égalité d'événements : $A = \big(\dots\big) \cup \big(\dots\big)$
Il reste ensuite à calculer $P(A)$.

5

1.
- *Loi de* R. Utiliser $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1,\dots,C_n)$ où $C_1,\dots,C_n$ sont les colonnes de la matrice. Les colonnes de M sont toutes proportionnelles à U :
  - $C_i = X_i U$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$
  - donc $\operatorname{rg} M$ vaut 0 (si tous les X_i sont nuls) ou 1 (si au moins un des X_i n'est pas nul).

  Dit autrement, R est à valeurs dans $\{0,1\}$. Reste à calculer $P(R = 0)$. Pour cela exprimer l'événement $\{R = 0\}$ comme une intersection des $\{X_i = 0\}$.
- *Loi de* S. Remarquer que $S = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$: il s'agit d'une somme de n variables indépendantes, les X_k^2, qui suivent toutes une loi $\mathscr{B}(p)$. La loi de S est donc donnée par un théorème du cours.

2. On cherche $P(A)$ où A : « M représente un projecteur »
Ainsi on cherche $P(M^2 = M)$. Tout réside dans le calcul de M^2. Pour ce calcul noter que $U^\top \times U \in \mathbb{R}$ (matrice de taille $(1,1)$). On obtient : $M^2 = SM$.
Ainsi : $A = \big\{M^2 = M\big\} = \{S = 1\} \cup \{M = 0\}$.

6

1. Partir de $E(X) = \sum_{k=0}^{N} kP(X = k)$ puis utiliser
$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

2. a) Utiliser : $\{M_n \leq k\} = \{X_1 \leq k\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq k\}$ (note [1])
puis utiliser l'indépendance des X_i.

b) Utiliser la question **1.** et $\{M_n > k\} = \overline{\{M_n \leq k\}}$.

Réponse : $E(M_n) = 6 - \left(\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

7

a) Calculer $P(M_n \geq k)$ d'abord en utilisant :
$$\{M_n \geq k\} = \{X_1 \geq k\} \cap \cdots \cap \{X_n \geq k\}$$
(note [2]) puis en déduire $P(M_n = k)$ (note [3])

b) Noter que : $p_n = P(M_n = 1)$.
Réponse : $p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

8 *Attention : on ne peut pas écrire* $E(S_N) = \sum_{k=1}^{N} E(X_k)$ *car ici* N *n'est pas un entier fixé mais une variable aléatoire.*
Par définition de l'espérance : $E(S_N) = \sum_{k \in S_N(\Omega)} kP(S_N = k)$
Calculer $P(S_N = k)$ en « gelant » la variable N *i.e.* en appliquant la formule des probas totales avec le sce $\{N = \ell\}_{0 \leq \ell \leq n}$.
Cela permet d'écrire $E(S_N)$ comme une somme double.
En permutant les symboles $\sum$, constater que la somme intérieure est $E(S_\ell) = \ell E(X_1)$.
Réponse : $E(S_N) = E(X_1)E(N)$.
Pour calculer $V(S_N)$:

- Utiliser $V(S_N) = E(S_N^2) - E(S_N)^2$
- Par la formule de transfert $E(S_N^2) = \sum_{k \in S_N(\Omega)} k^2 P(S_N = k)$
- Adapter le raisonnement qui a permis de calculer $E(S_N)$ en utilisant notamment que $E(S_\ell^2) = V(S_\ell) + E(S_\ell)^2$.
- *Réponse :* $V(S_N) = V(X_1)E(N) + E(X_1)^2 V(N)$

9

1. Montrer que $\{X \leq k\} \subset \{Y \leq k\}$.

2. Le résultat de la question 1 ne s'applique pas directement (ici il n'est pas possible de comparer X et Y).
Construire X' et Y' comme des sommes de variables binomiales indépendantes. Etant données des variables aléatoires $X_1,\dots,X_{n+1}$ indépendantes sur un même espace probabilisé et toutes de lois $\mathscr{B}(p)$, poser
$$X' = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad Y' = X_1 + \cdots + X_{n+1}$$
On peut appliquer **1.** à X' et Y'

1. Le max est plus petit que k ssi tous sont plus petits que k
2. Le min est plus grand que k ssi tous sont plus grands que k
3. le min vaut k s'il est plus grand que k mais pas plus grand que $k+1$

10 Supposer par l'absurde que c'est le cas. En notant X_1 le numéro du premier dé et X_2 le numéro du second, l'hypothèse assure que X_1 et X_2 sont indépendantes, toutes deux à valeurs dans $[\![1,6]\!]$ et $X_1+X_2 \sim \mathscr{U}\big([\![2,12]\!]\big)$.
En posant : $p_i = P(X_1 = i)$, $q_i = P(X_2 = i)$
puis : $P = \sum_{i=1}^{6} p_i X^{i-1}$ et $Q = \sum_{i=1}^{6} q_i X^{i-1}$, observer que le fait que $X_1 + X_2$ suive la loi $\mathscr{U}\big([\![2,12]\!]\big)$ se traduit par l'égalité polynomiale : $PQ = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} X^k$, polynôme dont on connaît les racines. Obtenir une contradiction en montrant que P (et Q) possède une racine réelle (observer le degré).

11 **a)** X_1 suit une loi usuelle

b) $V(X_1)$ et $V(X_2)$ sont données par le cours. Calculer $V(X_1+X_2)$ en notant que $X_1+X_2+X_3$ est connue

c) Utiliser $\operatorname{cov}(X_1,X_2) = \frac{1}{2}\big(V(X_1+X_2) - V(X_1) - V(X_2)\big)$.

12 **1.** • $(X-1)^2$ est à valeurs dans $\{0,1\}$.

• Il est plus simple de calculer $P\big((X-1)^2 = 0\big) = P(X=1)$

Réponse finale : $(X-1)^2 \sim \mathscr{B}(\frac{1}{2})$ et $(Y-1)^2$ aussi
La loi de S s'obtient sans calcul en appliquant un résultat du cours. *Réponse : $S \sim \mathscr{B}(2,\frac{1}{2})$*

2. a) *Attention : $E\big(S(T-1)\big) = E(S)E(T-1)$ est illégal sans hypothèse d'indépendance entre S et T.*
En revanche X et Y sont indépendantes et

$$S(T-1) = (X-1)^3(Y-1) + (X-1)(Y-1)^3$$

Exploiter ensuite l'indépendance de X et Y la valeur de $E(Y-1)$ et $E(X-1)$ *Réponse finale : $E(S(T-1)) = 0$*

b) Utilisez $\operatorname{cov}(S,T) = E(ST) - E(S)E(T)$:

- $E(S)$ s'obtient sans calcul (on connaît la loi de S)
- $E(T) = E\big((X-1)(Y-1)+1\big)$
- Pour $E(ST)$ écrire : $ST = S(T-1+1) = S(T-1)+S$

Réponse finale : $\operatorname{cov}(S,T) = 0$

c) *Attention : $\operatorname{cov}(S,T) = 0$ n'assure pas que S et T sont indépendantes*

13 **a)** Z est à valeurs dans $[\![-n,n]\!]$.

Technique : on « gèle » la variable Y

Appliquer la formule des probabilités totales pour « geler » la variable Y

$$P(Z=k) = P(X = Y+k) = \sum_{i=0}^{n} P_{\{Y=i\}}(X = i+k)P(Y=i)$$

Après quelques simplifications on obtient :

$$P(X = Y+k) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}P(X = k+i)$$

Pour calculer $P(X = k+i)$ distinguer des cas :

- *Si $k \geq 0$* Alors $P(X = k+i) = 0$ lorsque $i > n-k$ donc arrêter la somme à $n-k$
- *Si $k < 0$* Alors $P(X = k+i) = 0$ lorsque $i < -k$ donc démarrer la somme à $-k$.

On peut aussi éviter la disjonction de cas en remarquant que $Z \sim -Z$ ce qui permet de ne traiter que le cas où $k \geq 0$.

b) *Réponse à trouver :* $\operatorname{cov}(Z,X) = \frac{n}{4}$

14 **1.** Y_i est à valeurs dans $\{0,1\}$ et

$$\{Y_i = 1\} = \{X_i = 1\} \cap \{X_{i+1} = 1\}$$

Réponse à trouver : $Y_i \sim \mathscr{B}(p^2)$.
L'espérance et la variance s'obtiennent sans calcul

2. Y_iY_{i+1} suit elle aussi une loi de Bernouilli.
On a toujours $\{Y_iY_{i+1} = 1\} = \{Y_i = 1\} \cap \{Y_{i+1} = 1\}$ mais ici Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes (toutes les deux dépendent de X_i).
Pour s'en sortir exprimer $\{Y_iY_{i+1} = 1\}$ comme une intersection de trois événements dépendant de X_i, X_{i+1} et X_{i+2} (qui elles sont indépendantes).
On trouve $Y_iY_{i+1} \sim \mathscr{B}(p^3)$.
Pour la covariance utiliser

$$\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})$$

Réponse à trouver : $\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4$.

3. Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes si $j = i+1$, mais elles le sont si $j \geq i+2$.

15 **1.** Une modélisation possible à l'aide de variables aléatoires de lois usuelles

- Noter X_j le numéro de l'urne choisie pour la j^{e} boule pour tout $j \in [\![1, an]\!]$.
- $X_j \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
- Noter que : $A_i = \{X_1 \neq i\} \cap \cdots \cap \{X_{an} \neq i\}$.
- *Loi de T_i.* $T_i = \mathbb{1}_{A_i}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et
$$P(T_i = 1) = P(A_i)$$
puis utiliser l'indépendance des X_j.
Réponse à trouver : $P(A_i) = p_n$
- *Loi de T_iT_j.* De même avec $T_iT_j = \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}$. *Réponse à trouver : $P(A_i \cap A_j) = r_n$*

2. • *Espérance.* Exprimer Y_n à l'aide des T_i (SF 2 option 5)

• *Variance.* $V(S_n) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} V(T_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{cov}(T_i,T_j)\Big)$
Calculer $V(T_i)$ et $\operatorname{cov}(T_i,T_j) = E(T_i)E(T_j) - E(T_i)E(T_j)$ en utilisant les lois de T_iT_j et T_i

• *Limites.* Revenir à l'exponentielle.
Réponse à trouver : $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-a}$ et $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2a}$

16 **1.** $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ où A_i est : « l'ascenseur s'arrête au i^e étage ».
Ainsi X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A_i)$.
Montrer que $P(\overline{A_i}) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$ (en notant E_j la variable désignant le numéro de l'étage choisi par la j^e personne, $E_j \sim \mathscr{U}([\![1,p]\!])$ et $\overline{A_i} = \{E_1 \neq i\} \cap \cdots \cap \{E_n \neq i\}$)

2. Exprimer X en fonction des X_i (voir SF 2).
Réponse à trouver : $E(X) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$.

3. Les X_i n'étant pas indépendantes :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{p} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$
Dans cette expression

- $V(X_i)$ est connu vu que $X_i \sim \mathscr{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$
- $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$ où :
  - $E(X_i)E(X_j)$ est connu
  - $E(X_iX_j)$ est à calculer en remarquant que X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A_i \cap A_j)$.
    Ici A_i et A_j ne sont pas indépendants. Utiliser $P(A_i \cap A_j) = 1 - P(\overline{A_i} \cup \overline{A_j}) = 1 - P(\overline{A_i}) - P(\overline{A_j}) + P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})$
    et montrer que : $P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^n$.

Réponse finale :
$$V(X) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right) + p(p-1)\left(\left(1 - \frac{2}{p}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n}\right)$$

17 **1.** • *Loi de* X. Utiliser : $P(X = i) = \sum_{j=1}^{m} P\left(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\right)$

Réponse : $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$

- *Loi de* Y. De même. *Réponse :* $Y \sim \mathscr{U}([\![1,m]\!])$
- *Indépendance de* X *et* Y. Constater les égalités
$$P\left(X = i\,,\ Y = j\right) = P(X = i)P(Y = j)$$
pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.

2. Montrer que : $P\left(X = i\,,\ Y = j\right) = \dfrac{1}{nm}$
pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.

18 • Si X et Y sont indépendantes : $P(X = i\,,\ Y = j)$ s'écrit sous la forme u_iv_j où $u_i = P(X = i)$ et $v_j = P(Y = j)$.

A a pour colonnes $(v_1C, v_2C, \ldots, v_pC)$ où $C = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

- Pour la réciproque, si A est de rang 1, les colonnes $(C_1, \ldots, C_p)$ de A sont toutes proportionnelles à une même colonne C. Ceci permet de montrer que :
  - $P(X = i, Y = j) = c_i\alpha_j$ pour certains $c_i, \alpha_j \in \mathbb{R}$.
  - On en déduit : $P(X = i) = ac_i$ et $P(Y = j) = s\alpha_j$
    où : $a = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j$ et $s = \sum_{i=1}^{n} c_i$.
  - Il reste à montrer que $as = 1$ pour assurer l'indépendance de X et Y

19 **1. a)** Appliquer la technique du savoir-faire SF 8
Réponse finale : $P(U = k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$

b) Utiliser $E(U) = \sum_{k=1}^{n} kP(U = k)$

2. a) U et V ne sont pas indépendantes : trouver *un* couple (i,j) pour lequel
$$P(\{U = i\} \cap \{V = j\}) \neq P(U = i)P(V = j)$$

b) Remarquer que : $U + V = X + Y$.
Cela permet d'exprimer V en fonction de X, Y et U dont les espérances sont connues.
Réponse finale : $E(V) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

3. Il s'agit de calculer $P\left(\{U = i\} \cap \{V = j\}\right)$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$. U et V ne sont pas indépendantes donc :
$$P\left(\{U = i\} \cap \{V = j\}\right) \neq P(U = i)P(V = j)$$
Exprimer l'événement $\{U = i\} \cap \{V = j\}$ en fonctions des événements $\{X = i\}$ et $\{Y = j\}$ et utiliser l'indépendance de X et Y (distinguer 3 cas sur i et j)

Réponse finale : $P\left(\{U = i\} \cap \{V = j\}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } i = j \\ \frac{2}{n^2} & \text{si } i > j \end{cases}$

20 **1.** Deux possibilités :

- *Méthode 1.* En partant de l'égalité d'événements :
  $\{Y_{k+1} = 1\} = \{Y_k = 1\} \cap \{X_{k+1} = 1\} \cup \{Y_k = -1\} \cap \{X_{k+1} = -1\}$
  puis en prenant la probabilité de cette réunion incompatible (et X_{k+1} et indépendante de Y_k)
- *Méthode 2.* On calcule $P(Y_{k+1} = 1)$ par la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $\left(\{Y_k = 1\}, \{Y_k = -1\}\right)$.

2. • $u_k + v_k = 1$
- Avec **1.** $(u_k - v_k)$ est géométrique de raison $2p - 1$

On en déduit u_k et v_k par somme et différence

21 **1. a)** Sachant $\{N = i\}$ il s'agit d'un tirage simultané de i boules choisies parmi n boules.
Ainsi : $P_{\{N=i\}}(X_j = 1) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ où

- Ω est l'ensemble des combinaisons de i boules choisies parmi n
- A : « La boule j fait partie des i boules choisies »

Reste à dénombrer Ω (tirages simultanés) et A. Pour dénombrer A, pensez « comme un tricheur », réaliser A revient à mettre la boule j de côté puis à tirer $i - 1$ boules dans l'urne contenant $n - 1$ boules.
Réponse finale après simplifications : $P_{\{N=i\}}(X_j = 1) = \frac{i}{n}$.

b) X_j suit une loi de Bernoulli donc $E(X_j) = P(X_j = 1)$.
Calculer $P(X_j = 1)$ via la formule des probabilités totales avec le sce $\left(\{N = i\}\right)_{1 \leq i \leq n}$.
Réponse finale : $E(X_j) = \frac{n+1}{2n}$

2. *Réponse finale :* $E(S) = \frac{(n+1)^2}{4}$

22 Remarquer que $\{X \geq a\} \subset \{g(X) \geq g(a)\}$ puis appliquer une inégalité probabiliste.

23 Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\dfrac{S_n}{n}$.

24 Plusieurs possibilités on peut par exemple :

- Poser $Y = \dfrac{X_n}{n} - p$ et appliquer l'inégalité de Markov à $|Y|$
  Montrer ensuite que $E(|Y|) \leq \sqrt{V(Y)}$ (fait en cours).

- Appliquer directement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et discuter selon la position de $\dfrac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$ par rapport à 1.

25 **1.** Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\frac{S_n}{n}$.

2. $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX_1}\dots e^{tX_n})$ puis utiliser l'indépendance des X_i et enfin le théorème de transfert pour calculer $E(e^{tX_i})$.

3. a) Etudier la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}} \operatorname{ch} t$

b) Appliquer l'inégalité de Markov :
$P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$ avec $Y = e^{tS_n}$ et $a = e^{nt\varepsilon}$.
après avoir montré que $\{Y \geq a\} = \left\{\frac{S_n}{n} \geq n\varepsilon\right\}$.
Utiliser ensuite la question **3a)**.

c) La question **3b)** assure que :

$$\boxed{\forall t > 0}, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \underbrace{e^{\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon}}_{=g(t)}$$

Ainsi : $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \min\limits_{t \in \mathbb{R}_+^*} g.$

Etudier g sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\min\limits_{t\in\mathbb{R}_+^*} g = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

26 **1.** Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n.

2. Remarquer que $x^2 P(A_k) = E(x^2 \mathbb{1}_{A_k})$ puis utiliser la croissance de l'espérance.

3. Remarquer que :
$S_n^2 \mathbb{1}_{A_k} = \big((S_n - S_k) + S_k\big)^2 \mathbb{1}_{A_k} \geq 2(S_n - S_k)S_k \mathbb{1}_{A_k} + S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}$
puis exploiter l'indépendance de $S_n - S_k$ et $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ (lemme des coalitions) pour montrer que

$$E\big((S_n - S_k)S_k \mathbb{1}_{A_k}\big) = 0$$

4. A est la réunion disjointe des A_k. En sommant les inégalités des deux questions précédentes : $x^2 P(A) \leq E(S_n^2 \mathbb{1}_A)$.
Reste à montrer que $E(S_n^2 \mathbb{1}_A) \leq n\sigma^2$.
Pour cela, remarquer que $n\sigma^2 = E(S_n)$.

27 Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n.

28 **a)** Appliquer l'inégalité de Markov à $(X - m + t)^2$.

b) Optimiser l'inégalité de la question précédente par rapport à t : chercher le minimum de $t \mapsto \dfrac{t^2 + \sigma^2}{(t+a)^2}$.

c) On peut appliquer l'inégalité de la question b à la variable $Y = -X$ d'espérance $-m$.