Indépendance

1 Deux joueurs lancent une pièce de monnaie équilibrée n fois chacun. En utilisant deux variables aléatoires, calculer la probabilité p_n qu'ils obtiennent le même nombre de pile et trouver un équivalent de p_n lorsque $n \to +\infty$.
Indication : On pourra utiliser la formule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2 Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi. On note $\{u_1, \ldots, u_n\}$ l'ensemble des valeurs communes de X et Y.
On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $p_k = P(X = u_k) = P(Y = u_k)$.

Démontrer que : $P(X \neq Y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)$.

3 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes de loi $\mathscr{U}([\![1, 2p]\!])$. Avec quelle probabilité le produit $X_1 \ldots X_n$ est-il pair ?

4

1. Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que $M = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$ représente un projecteur.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathscr{B}(n, p)$. Avec quelle probabilité la matrice $M = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$ représente-elle un projecteur non-nul ?

5 SF 1 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On pose : $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

1. On note M la matrice carrée $M = U \times U^\top$ et on pose : $R = \mathrm{rg} M$ et $S = \mathrm{tr} M$. Déterminer les lois de R et S.
2. Calculer la probabilité que M représente un projecteur.

6 SF 2 SF 8

1. Soit X un variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, N]\!]$.
   Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.
2. On lance n fois un dé équilibré. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le numéro obtenu au i^e lancer et on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
   a) Calculer $P(M_n \leq k)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$.
   b) En déduire $E(M_n)$ et étudier $\lim_{n \to +\infty} E(M_n)$.

7 SF 8 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$. On pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
a) Déterminer la loi de M_n **b)** On note p_n la probabilité que l'un des X_i soit égal à 1. Montrer que $p_n \geq 1 - \frac{1}{e}$.

8 SF 2 Soient $X_1, \ldots, X_n$ et N des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que N est à valeur dans $[\![0, n]\!]$ et que $X_1, \ldots, X_n$ sont de même loi. On pose : $S_N = X_1 + \ldots X_N$.
Calculer $E(S_N)$ et $V(S_N)$.

9 SF 1 Est-il possible de truquer deux dés de façon à ce qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément ?

10 SF 1 SF 5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $X \leq Y$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$: $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé et pour lesquelles : $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n+1, p)$.
   Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$.
   Indication : Construire deux variables aléatoires X' et Y' telles que : $X' \sim \mathscr{B}(n, p)$, $Y' \sim \mathscr{B}(n+1, p)$ et $X' \leq Y'$.

Variance, covariance

11 SF 1 SF 2 SF 3 SF 9 À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 le nombre de voitures ayant franchi ces barrières.
a) Déterminer la loi de X_1
b) Calculer : $V(X_1)$, $V(X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$
c) En déduire : $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$.

12 SF 1 SF 2 SF 9 SF 11 Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes de même loi $\mathscr{B}(2, \frac{1}{2})$.

1. Déterminer la loi de $(X-1)^2$ et $(Y-1)^2$.
   En déduire la loi de $S = (X-1)^2 + (Y-1)^2$.
2. On pose $T = (X-1)(Y-1) + 1$.
   a) Calculer : $E(S(T-1))$ **b)** Calculer : $\mathrm{cov}(S, T)$
   c) S et T sont-elles indépendantes ?

13 SF 5 SF 9 Soient X, Y indépendantes de lois $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
a) On pose $Z = X - Y$. Montrer :
$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \quad P(Z = k) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{n-|k|} \binom{n}{i} \binom{n}{i+|k|}$$
b) Calculer $\mathrm{cov}(X, Z)$.

14 SF 1 SF 2 SF 3 SF 9 SF 11 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathscr{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

1. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$. Déterminer la loi de Y_i puis calculer son espérance et sa variance.
2. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer la loi de $Y_i Y_{i+1}$ puis calculer $\mathrm{cov}(Y_i, Y_{i+1})$.
3. Pour $1 \leq i < j < n$, les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

15 SF 1 SF 2 SF 3 SF 9 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$. On répartit au hasard an boules numérotées dans n urnes $U_1, \ldots, U_n$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note T_i la variable indicatrice de l'événement A_i : « L'urne U_i est vide ». On note Y_n le nombre d'urnes vides après la répartition et on pose : $S_n = \frac{1}{n} Y_n$.

On pose : $p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an}$ et $r_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{an}$

1. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, distincts.
   Démontrer que : $T_i \sim \mathscr{B}(p_n)$ et $T_i T_j \sim \mathscr{B}(r_n)$.
2. Montrer que : $E(S_n) = p_n$ et $V(S_n) = r_n - p_n^2 + \frac{p_n - r_n}{n}$
   et étudier : $\lim_{n \to +\infty} E(S_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} V(S_n)$.

16 SF 2 SF 3 SF 9 Une foule de n personnes monte au rez-de-chaussée dans l'ascenseur d'un immeuble et chacune appuie au hasard sur un numéro entre 1 et p de l'un des étages, indépendamment des autres.

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement : « l'ascenseur s'arrête au i^e étage ». Déterminer la loi de X_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
2. Calculer l'espérance du nombre X d'arrêts de l'ascenseur
3. ★★★ Calculer la variance de X

Loi conjointe, loi conditionnelle

17 SF 7 SF 10 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini.

1. On suppose que $(X,Y) \sim \mathscr{U}\left([\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]\right)$ *i.e.* :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], \quad P(X=i\,,\ Y=j) = \frac{1}{nm}$$
Déterminer les lois marginales de X et Y et montrer que X et Y sont indépendantes.
2. On suppose réciproquement que X et Y sont indépendantes et que : $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ et $Y \sim \mathscr{U}([\![1,m]\!])$.
Montrer que : $(X,Y) \sim \mathscr{U}\left([\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]\right)$

18 SF 7 SF 10 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,p]\!]$.
On pose $A = \Big(P(X=i\,,\ Y=j)\Big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.
Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $\mathrm{rg}(A) = 1$.

19 SF 1 SF 2 SF 8 SF 11 Soit $n \geq 2$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes de même loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. On pose $U = \max(X,Y)$.

1. a) Déterminer la loi de U.
   b) En déduire que : $E(U) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.
2. On pose $V = \min(X,Y)$.
   a) U et V sont-elles indépendantes ?
   b) Calculer $E(V)$ sans déterminer sa loi.
3. Déterminer la loi du couple (U,V).

20 Soient $p \in \,]0,1[$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par :
$$P(X_k=1)=p \quad \text{et} \quad P(X_k=-1)=1-p$$
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose : $Y_k = X_1 \dots X_k$ (produit).

1. On pose $u_k = P(Y_k=1)$ et $v_k = P(Y_k=-1)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Exprimer u_{k+1} et v_{k+1} en fonction de u_k et v_k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
2. En calculant u_k+v_k et u_k-v_k, déterminer une expression de u_k et v_k en fonction de $k \in [\![1,n]\!]$.

21 SF 2 SF 4 On tire simultanément N boules de manière aléatoire dans une urne de n boules numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $N \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$. On note par ailleurs S la somme des numéros des boules obtenues.

1. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note X_j l'indicatrice de l'événement « la boule n° j figure parmi les boules tirées ».
   a) Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$ calculer : $P_{\{N=i\}}(X_j=1)$.
   b) En déduire l'espérance de X_j pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.
2. En déduire l'espérance de S.

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

22 SF 12 Soit X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. Etablir : $\forall a>0, \quad P(X \geq a) \leq \dfrac{E\big(g(X)\big)}{g(a)}$

23 SF 13 Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi. On note m leur espérance et σ leur écart-type et on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Etablir :
$$\forall \varepsilon>0, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

24 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$

25 SF 12 SF 13 Soit $\varepsilon > 0$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et de même loi définie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par : $P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\frac{1}{2}$. On pose : $S_n = X_1+\dots+X_n$.

1. Montrer que : $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$.
2. Etablir : $\forall t>0, \quad E\left(e^{tS_n}\right) = (\mathrm{ch}\, t)^n$.
3. a) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{ch}\, t \leq 1$
   b) Montrer : $\forall t>0, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{\frac{nt^2}{2}-nt\varepsilon}$
   c) En déduire : $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$

26 SF 13 Soient $\varepsilon > 0$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et centrées et de même loi . On note σ leur écart type commun. On pose : $S_k = X_1+\dots+X_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

1. Montrer que : $P\big(|S_n| \geq x\big) \leq \frac{n\sigma^2}{x^2}$.

   On souhaite montrer que $P\left(\max\limits_{1\le k\le n} |S_k| \geq x\right)$ est majorée par la même borne. On pose $A = \left\{\max\limits_{1\le k\le n} |S_k| \geq x\right\}$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_k = \big\{|S_1|<x\big\} \cap \ldots \cap \big\{|S_{k-1}|<x\big\} \cap \big\{|S_k| \geq x\big\}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $x^2 P(A_k) \leq E\left(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}\right)$
3. Montrer : $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad E\left(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}\right) \geq E\left(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}\right)$.
4. Exprimer A en fonction de $A_1,\dots,A_n$ et déduire des deux questions qui précèdent l'inégalité : $P(A) \leq \frac{n\sigma^2}{x^2}$.

27 SF 13 Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{B}(p_i)$ où $p_i \in [0,1]$.
On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $m_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$.
Montrer : $\forall \varepsilon>0, \quad P(|S_n-m_n| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$

28 SF 12 Soit X une variable aléatoire réelle et $a>0$.
On pose : $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

a) Montrer : $\forall t \geq 0,\ P(X-m \geq a) \leq \dfrac{t^2+\sigma^2}{(t+a)^2}$
b) En déduire : $P(X-m \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$
c) Montrer enfin : $P(|X-m| \geq a) \leq \dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$