Loi, espérance et variance

1 *Ex. 95.2, banque INP* SF 1 Une urne contient deux boules blanches et huit noires. On tire successivement et sans remise cinq boules dans cette urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer la loi de X.

2 *Ex. 104, banque INP* SF 1 SF 2 Un troupeau de n chèvres se répartit dans trois prés numérotés de 1 à 3. Chacune entre au hasard dans l'un des trois prés. On note X le nombre de prés restés vides une fois les chèvres réparties.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer $P(X=2)$

c) Finir de déterminer la loi de X

d) Calculer la limite de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 SF 1 On tire p boules d'une urne en contenant N, numérotées de 1 à N. On note X le plus grand numéro obtenu

1. On suppose les tirages successifs avec remise.

a) Calculer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$

b) En déduire la loi de X.

2. Calculer la loi de X dans le cas d'un tirage simultané des p boules (où $p \leq N$).

4 *cf. Ex. 109, banque INP* SF 1 SF 2 Soit n un entier naturel strictement supérieur à 2. Une urne contient deux boules blanches et $n-2$ boules rouges que l'on tire une à une sans remise. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X. **2.** Calculer $E(X)$.

3. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

5 SF 1 SF 2 Une urne contient une boule numérotée « 1 », deux boules indiscernables numérotées « 2 », ..., $2n$ boules indiscernables numérotées « $2n$ ». On tire une boule dans cette urne et on note X le numéro de la boule tirée.

a) Déterminer la loi et l'espérance de X.

b) Calculer la probabilité p_n de l'événement « X est pair ». Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

6 SF 2 Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ et en 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. a) Quelles sont les valeurs prises par X_n ?

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$,
$$P(X_n = k) = pP(X_{n-1} = k-1)$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $E(X_n) = pE(X_{n-1}) + p$ puis déterminer $E(X_n)$ en fonction de n et p.

7 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $n+1$ tirages avec remise dans une urne contenant n boule et on note T le rang d'apparition du premier tirage identique à l'un des précédents.

1. Montrer que : $P(T > k) = \dfrac{n-k+1}{n} P(T > k-1)$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$.

2. En déduire la loi de T.

8 SF 1 SF 2 Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules successivement sans remise. On note X le rang de la dernière boule noire tirée.

1. Déterminer la loi de X.

2. a) Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

b) En déduire une expression simple de $E(X)$.

9 SF 2 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles. On suppose que : $E(X_1^k) = E(X_2^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que X_1 et X_2 suivent la même loi.
Indication : Considérer certains polynômes de Lagrange

Lois usuelles

10 SF 1 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = |X - n|$.

11 SF 2 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p)$. Calculer : $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

12 SF 1 SF 2 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}\left([\![1, 6n]\!]\right)$.

1. Calculer l'espérance de $Y = \cos \frac{X\pi}{3}$.

2. Déterminer la loi de Y et retrouver le résultat du **1.**.

13 SF 1 SF 2 On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis un entier Y entre 1 et X. Trouver la loi et l'espérance de Y

14 *cf. Ex. 95.1, banque INP* SF 1 SF 2 Une urne contient b boules blanches et n boules noires. Un joueur tire N boules dans cette urne ($N \geq 1$), successivement et avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne t euros, sinon il en perd 1. On note X le nombre de boules blanches tirées et Y le gain (algébrique) du joueur à l'issue des N parties.

a) Donner la loi de X et rappeler $E(X)$.

b) Déterminer la valeur de t pour que le jeu soit équitable *i.e.* pour que $E(Y) = 0$.

15 SF 2 SF 3 Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ ou par $\beta \in]0,1[$ avec probabilité $q = 1-p$. On suppose que ces variations sont indépendantes. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note S la valeur de l'action après n variations. Déterminer l'espérance et la variance de S.

16 SF 2 Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Un compteur est censé afficher le résultat de X mais celui-ci ne fonctionne pas correctement : si X n'est pas nul, le compteur affiche bien la valeur de X ; si X est nul, il affiche au hasard une valeur entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Etablir : $P(Y = k) = \dfrac{1}{n} P(X = 0) + P(X = k)$

b) En déduire $E(Y)$.

17 SF 1 SF 2 SF 3 Une puce se déplace en faisant des sauts sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$ ou de deux avec probabilité $1-p$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note X_n sa position sur l'axe après n sauts, et Y_n le nombre de sauts d'une seule unité parmi ces n sauts.

a) Quelle est la loi de Y_n ? En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

b) Déterminer la loi de X_n.

18 SF 1 SF 2 On range m chaussettes, au hasard et indépendamment les unes des autres, dans une commode comportant n tiroirs numérotés de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k le nombre de chaussettes rangées dans le tiroir k. On note X le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement.

1. Déterminer la loi de X_k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$
2. En déduire l'espérance de X.

19 SF 1 Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur. On effectue cette expérience plusieurs fois et on note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. Montrer que $X_n \sim \mathscr{U}([\![1,n+1]\!])$.

20 SF 2 Soit $n \geq 2$. Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n^{es} de l'unité.
Calculer : **a)** $E(\operatorname{Re} Z) \times E(\operatorname{Im} Z)$ **b)** $E(\operatorname{Re} Z \times \operatorname{Im} Z)$

21 SF 2 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose : $\mu_r = E\big((X-np)^r\big)$.
Montrer que la série $\sum \dfrac{\mu_r x^r}{r!}$ converge et calculer sa somme.

22 SF 1 Soit $k \geq 2$. On pose : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$.
Pour tout entier naturel j on pose en outre : $S_j = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$

1. Calculer S_j pour tout $j \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X_n le nombre de piles obtenus et p_n la probabilité que X_n soit divisible par k. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

23 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble $\mathscr{F}([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])$ des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On note N_n le nombre de points fixes de f_n.

a) Déterminer la loi de N_n
b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} P(N_n = k)$.

24 SF 2 Un tiroir contient initialement n paires de chaussettes. Chaque soir une souris vorace dévore entièrement une chaussette. Pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, on note X_k le nombre de paires complètes restantes après k passages de la souris.

1. Soit $k \in [\![0,2n-1]\!]$.
   a) Montrer que : $P(X_k - X_{k+1} = 1) = \dfrac{2E(X_k)}{2n-k}$.
   b) En déduire que : $E(X_{k+1}) = \dfrac{2(n-1)-k}{2n-k} E(X_k)$.
2. En déduire une expression de $E(X_k)$ en fonction de n et k pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$.

Expressions alternatives de l'espérance

25 SF 1 SF 2

1. Soit X un variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
   Montrer que $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X \geq k)$.
2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement, sans remise. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note u_i le numéro de la i^{e} boule tirée et X le plus grand entier k tel que $u_1 < \cdots < u_k$.
   a) Calculer $P(X \geq k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
   b) En déduire $E(X)$ puis étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$.

26 SF 1 SF 2

1. Soit X un variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,N]\!]$.
   Montrer que $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.
2. On tire avec remise n boules d'une urne en contenant N, numérotées de 1 à N. On note X_N le plus petit numéro obtenu.
   a) Montrer que $E(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N}{n+1}$
   b) Etablir : $E(X_N^2) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1) P(X_N > k)$
   c) En déduire : $V(X_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{nN^2}{(n+1)^2(n+2)}$

27 SF 1 SF 2

1. Soit X une variable aléatoire complexe définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P). Pour tout événement A de probabilité non nulle, on note $E_A(X)$ l'espérance de X pour la probabilité P_A : $E_A(X) = \displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k P_A(X=k)$.
   Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   Montrer que : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_{A_k}(X) P(A_k)$.
2. Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$. telles que U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On choisie une urne au hasard dans laquelle on effectue r tirages successifs avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.
   Calculer $E(X)$.

Exercices abstraits autour de l'espérance

28

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq b$ et soit X une variable aléatoire à valeur dans $[a,b]$
   a) Montrer que : $\dfrac{1}{X} \leq \dfrac{a+b-X}{ab}$.
   b) En déduire : $E(X)E\Big(\dfrac{1}{X}\Big) \leq \dfrac{(a+b)^2}{4ab}$.
2. Soit $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Montrer l'*inégalité de Kantorovitch*
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} p_i\Big) \leq \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$$

29 Soit $a \in [0,1]$ et X une variable aléatoire réelle positive.
Montrer : $(1-a)E(X) \leq E\big(X \mathbb{1}_{X \geq aE(X)}\big)$.