1 Ω est l'ensemble des 5-arrangements des dix boules de l'urne, muni de la probabilité uniforme. X est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.
Réponses à trouver :

- $P(X=0)=\frac{2}{9}$, $\quad P(X=1)=\frac{5}{9}$, $\quad P(X=2)=\frac{2}{9}$

2 **a)** X est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.

b) Modéliser une répartition des n chèvres par une n-liste $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ où :

- $C_1\in\{1,2,3\}$ est le numéro du pré choisi par la première chèvre
- ...
- $C_n\in\{1,2,3\}$ est le numéro du pré choisi par la n^{e} chèvre

(Avec cette modélisation, « répartir » les n chèvres revient à écrire un mot $C_1C_2\ldots C_n$ où chaque C_i est un chiffre de $\{1,2,3\}$.)
Ainsi Ω est l'ensemble de ces n-listes et $|\Omega|=3^n$.
Pour calculer $P(X=2)$, recourir au dénombrement :

- $\{X=2\}$ est l'événement A :« Toutes les chèvres vont dans le même pré ».
- $P(X=2)=P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Il reste à dénombrer A : mais réaliser A revient seulement à choisir le pré dans lequel on met toutes les chèvres.

Réponse finale : $P(X=2)=\dfrac{1}{3^{n-1}}$.

c) Il reste à trouver $P(X=1)$ et $P(X=0)$.
Avec la modélisation ci-dessus :

- $\{X=1\}$ est l'événement B :« Un seul des trois prés reste vide ».
- $P(X=1)=\frac{|B|}{|\Omega|}$.
- Il reste à dénombrer B. Réaliser B revient
  - choisir un pré parmi les 3 possibles : celui qui va rester vide.
  - Ceci fait, il s'agit de placer une à une toutes chèvres dans les deux autres prés :
    - Placer la première chèvre dans l'un des deux prés
    - Placer la seconde chèvre dans l'un des deux prés
    - ...
    - Placer la n^{e} chèvre dans l'un des deux prés

  Mais il faut retrancher 2 possibilités : celles où l'on place toutes les chèvres dans le même pré.

  Réponse finale : $P(X=1)=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$
- Pour $P(X=0)$ utiliser $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

d) Calculer $E(X)$ avec la définition de l'espérance.
On obtient :

$$E(X)=\frac{2^n}{3^{n-1}}=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Le résultat est cohérent : pour un grand nombre de chèvre, aucun des prés ne sera vide.

3 **1.** *N.B.* Ici $\Omega=[\![1,N]\!]^p$ (p tirages successifs avec remise).

a) $\{X\leq k\}$ est l'événement A_k : « Les p boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à k ».
Ainsi : $\quad P(X\leq k)=\frac{|A_k|}{|\Omega|}$.
Il reste à dénombrer A_k. Pour cela, ne pas oublier de « raisonner comme un tricheur », réaliser A_k revient à tirer successivement p boules dans une urne où l'on a placé seulement les k boules numérotées de 1 à k.

b) Utiliser : $\quad P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)\quad$ (note [1])

2. Appliquer la même méthode que celle utilisée à la question 1.
C'est le mode de dénombrement qui va changer : ici les tirages sont simultanés donc Ω est l'ensemble des combinaisons de p boules choisies parmi N boules.
Attention, ici : $\quad X(\Omega)=[\![p,N]\!]$.
Réponse finale : $P(X=k)=\dfrac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{N}{p}}$

4 **a)** X est à valeurs dans $[\![1,n-1]\!]$Reste à calculer la probabilité de l'événement
$\{X=k\}$: « La 1re boule blanche est obtenue au k^{e} tirage »
Il convient d'avoir les bons réflexes :

- Définir des événements élémentaires :

  B_k : « La k^{e} boule tirée est blanche »
- Exprimer l'événement $\{X=k\}$ comme une intersection de ces événements puis calculer $P(X=k)$ avec la formule des probabilités composées.

b) Utiliser la définition de l'espérance, les $P(X=k)$ sont connues avec la question précédente, il s'agit de calculer la somme obtenue.

c) Schématiquement :

$$Y = \text{Nb. de boules rouges au départ} - \text{Nb. de boules rouges tirées entre 1 et } X-1$$

On obtient une expression de Y en fonction de X de la forme $Y=aX+b$.
Pour calculer l'espérance de Y, utiliser la linéarité de l'espérance.

5 *Bien comprendre la composition de l'urne, elle est de la forme :①②②③③③④④④④... (jusqu'à $2n$ boules portant le numéro $2n$.*
En particulier commencer par compter le nombre total de boules dans l'urne.

a)
- *Loi de X.*
  $X(\Omega)=[\![1,2n]\!]$.
  Pour $k\in[\![1,2n]\!]$, $P(X=k)=\dfrac{\text{Nb. de boules portant le numéros } k}{\text{Nb. total de boules dans l'urne}}$.
- *Espérance de X.* Utiliser la définition de l'espérance et calculer la somme.

b) Il faut avoir le bon réflexe de nommer l'événement *i.e.* d'écrire $p_n=P(A_n)$ où A est l'événement « Le numéro obtenu est pair ».
Exprimer A_n comme une réunion incompatible

1. Pour s'en rappeler : « Etre égal à k c'est être inférieur ou égal à k mais pas inférieur ou égal à $k-1$ » et le « mais » donne un signe « - »

6

Point à retenir

L'écriture correcte de l'événement « le mobile avance d'une case » est : $\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\}$ qui traduit : « Le mobile était en $k-1$ à l'instant $n-1$ et il est en k à l'instant n ».

1. a) X_n est à valeurs dans $\{0,1,2,\dots,n\}=[\![0,n]\!]$

b)

Combiner deux idées :

- Ecrire : $\boxed{\{X_n=k\}=\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\}}$ (note [2])
- Remarquer que : $\boxed{p=P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n=k)}$.

2. Partir de : $E(X_n)=\sum_{k=0}^{n}kP(X_n=k)$ puis utiliser **1b)** pour faire apparaître $E(X_{n-1})$.
Une fois l'égalité $E(X_n)=pE(X_{n-1})+p$ obtenue, remarquer que la suite $u=\left(E(X_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique

7

1. Ecrire : $\{T>k\}=\{T>k-1\}\cap\{T>k\}$.

Remarquer que : $P_{\{T>k-1\}}(T>k)=\dfrac{n-(k-1)}{n}$.

2. Réitérer la relation de **1.** pour calculer $P(T>k)$.
Ensuite utiliser : $P(T=k)=P(T>k-1)-P(T>k)$.
Réponse [3] : $P(T=k)=\dfrac{n!(k-1)}{(n-k+1)!n^k}$
pour tout $k\in[\![2,n+1]\!]$

8

1. Prendre pour univers l'ensemble Ω des $2n$-arrangements de $2n$ boules de l'urne.
Réaliser $\{X=k\}$ revient à :

- Choisir les $n-1$ positions de tirages donnant des boules noires parmi les tirages $[\![1,k-1]\!]$ (le tirage k donne une boule noire).
- Une fois ces positions fixées il s'agit de « ranger » les n boules noires sur les n positions choisies pour les tirages donnant des boules noires et les n boules blanches sur leurs n positions.

Réponse après simplifications : $P(X=k)=\dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$

2. a) Utiliser la formule de Pascal pour faire apparaître une somme télescopique.

b) *Réponse :* $E(X)=\dfrac{n(2n+1)}{n+1}$

9 Notant $\{x_1,\dots,x_n\}$ l'ensemble des valeurs communes de X_1 et X_2, constater que l'hypothèse s'écrit

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \sum_{i=1}^{n}x_i^kP(X_1=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^kP(X_2=x_i)$$

Montrer alors que :

$$\forall Q\in\mathbb{R}[X],\quad \sum_{i=1}^{n}Q(x_i)P(X_1=x_i)=\sum_{i=1}^{n}Q(x_i)P(X_2=x_i)$$

puis en déduire que $P(X_1=x_i)=P(X_2=x_i)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ à l'aide de polynômes de Lagrange.

10

- Y est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$
- Pour calculer les $P(Y=k)$ exprimer l'événement $\{Y=k\}$ en fonction d'événements liés à X.
Par exemple, si $k\neq 0$:
$$\{Y=k\}=\{|X-n|=k\}=\{X=n+k\}\cup\{X=n-k\}$$
(note [4]).
C'est une réunion incompatible et la probabilité de chaque événement $\{X=n+k\}$ et $\{X=n-k\}$ est connue (X suit une loi usuelle).

Réponse finale : $P(Y=k)=\begin{cases}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} & si\ k=0\\ \binom{2n}{n+k}\dfrac{1}{2^{2n-1}} & si\ k\neq 0\end{cases}$

11 *N.B* La loi de X est connue :

- X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$
- $\forall k\in[\![0,n]\!],\quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Utiliser la formule de transfert :

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k}P(X=k)$$

On est ramené à un calcul de somme.
Pour calculer la somme obtenue il y a deux possibilités :

- *Première possibilité :* Utiliser la formule sans nom pour écrire $\frac{1}{1+k}\binom{n}{k}=\frac{1}{1+n}\binom{n+1}{k+1}$
- *Deuxième possibilité :* Exploiter astucieusement l'égalité :
$$\forall x\in[0,1],\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-p)^{n-k}=(x+1-p)^n$$
(l'astuce est voisine de celle utilisée pour calculer dans le cours l'espérance de la loi binomiale).

12

1. Utiliser le théorème de transfert. On obtient $E(Y)=0$.

2. Y est à valeurs dans $\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2}\right\}$.

Pour chaque valeur $k\in\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2}\right\}$ exprimer $\{Y=k\}$ en fonction d'événements du type $\{X\equiv\dots[6]\}$.

---

2. Cette égalité a lieu parce que $\{X_n=k\}\subset\{X_{n-1}=k-1\}$: pour être en k à l'instant n, il faut avoir été en $k-1$ à l'instant d'avant
3. Que l'on peut aussi obtenir directement par un argument combinatoire
4. Remarquez la rédaction particulière aux variables aléatoires : lorsque l'on « résout une équation dans un événement » on écrit des égalités au lieu des équivalences utilisées habituellement. Au brouillon, vous pouvez très bien utiliser des « $\Leftrightarrow$ » et écrire : $Y=k\Leftrightarrow|X-n|=k$ mais pensez ensuite lorsque vous rédigez au propre à revenir aux égalités entre événements *i.e.* à écrire : $\{Y=k\}=\{|X-n|=k\}$. La raison est que l'on a affaire à des égalités entre des ensembles et, de façon générale, si A et B sont des parties d'un ensemble E écrire : $\left(\forall x\in E,\quad (x\in A\Leftrightarrow x\in B)\right)$ équivaut à écrire : $A=B$

13 *N.B* X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$:

- Y est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
- *Attention :* $P(Y=k)$ n'est pas connue, car Y est définie en fonction de la valeur de X. En particulier ne pas dire que Y suit la loi uniforme sur $[\![1,X]\!]$: cela n'a pas de sens car X est une variable aléatoire (et pas un nombre fixé).
- Ce que l'on connaît c'est la loi de Y « lorsque X est gelé » : sachant $\{X=i\}$ on sait que Y est choisi au hasard entre 1 et i donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$P_{\{X=i\}}(Y=k) = \begin{cases} \dfrac{1}{i} & \text{si } k \leq i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $P(Y=k)$ en appliquant la formule des probabilités totales avec le s.c.e $(\{X=i\})_{1\leq i\leq n}$

Réponse finale : $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\dfrac{1}{i}$ *puis* $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$.

14 **a)** La loi de X se trouve sans calcul : c'est une loi usuelle.

b) On peut calculer $E(Y)$ sans déterminer la loi de Y : il suffit d'exprimer Y en fonction de X puis d'utiliser la linéarité de l'espérance. Schématiquement :

$$Y = t\times\underbrace{(\text{Nb. de parties gagnées})}_{\text{à exprimer en fct de } X} - \underbrace{(\text{Nb. de parties perdues})}_{\text{à exprimer en fct de } X}$$

Réponse à trouver : $E(Y) = (t+1)\dfrac{Nb}{b+n} - N$.

Réponse finale : $E(Y) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{n}{b}$.

15 *Attention : la loi de S n'est pas usuelle. Mais on peut exprimer S à l'aide de lois usuelles*. Noter X la variable aléatoire qui compte le nombre de jour où l'action est multipliée par α. X suit une loi usuelle (facile, X compte des « succès »).
On obtient une expression de la forme $S = f(X)$.
Calculer $E(S)$ à l'aide de la formule de transfert.
Réponse finale : $E(S) = \left(\alpha p + \beta q\right)^n$.

Pour la variance utiliser $V(S) = E(S^2) - \left(E(S)\right)^2$.
Pour calculer $E(S^2)$ utiliser la formule de transfert.
Réponse finale : $V(S) = \left(\alpha^2 p + \beta^2 q\right)^n - \left(\alpha p + \beta q\right)^{2n}$.

16 **a)** Ecrire : $\boxed{\{Y=k\} = \{X=0\} \cap \{Y=k\} \cup \{X=k\}}$[5]
puis égaler les probabilités.

b) Utiliser la définition de l'espérance : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(Y=k)$

Remplacer $P(Y=k)$ par la valeur trouvée en *a)* puis séparer les deux sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$ et $P(X=0)$
s'obtiennent sans calcul vu que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$

Réponse à trouver : $E(Y) = np + (1-p)^n \times \dfrac{n+1}{2}$.

5. Cette égalité a lieu parce que $Y=k$ ssi $X=k$ ou si $X=0$ et si le nombre tiré au hasard est égal à k

17 **a)** La loi de Y_n se trouve sans calcul : c'est une loi usuelle.
Il n'est pas nécessaire de trouver la loi de X_n pour trouver son espérance : on peut exprimer X_n en fonction de Y_n.
Schématiquement :

$$X_n = \underbrace{(\text{Nb. de sauts d'une unité})}_{Y_n} + 2\times\underbrace{(\text{Nb. de sauts de 2 unités})}_{n-Y_n}$$

Réponse finale : $E(X_n) = n(2-p)$.

b) X_n est à valeurs dans $[\![n,2n]\!]$.
On connaît $P(Y_n = j)$ pour tout j (c'est une loi binomiale).
Pour $k \in [\![n,2n]\!]$ il suffit exprimer l'événement $\{X_n = k\}$ en fonction de Y_n ie de compléter $\{X_n = k\} = \{Y_n = ...\}$
Pour cela, au brouillon « résoudre » $X_n = k \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow Y_n = \bullet$
Au propre écrire : $\{X_n = k\} = \{\ldots\} = \cdots = \{Y_n = \bullet\}$
Réponse finale : $P(X_n = k) = \binom{n}{k-n} p^{2n-k}(1-p)^{k-n}$

18 **1.** La loi de X_k se trouve sans calcul : c'est une loi usuelle (X_k **compte** le nombre de chaussettes dans le tiroir k).

2. Utiliser : $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$.

Réponse : $E(X) = n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m$

19 Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour l'hérédité utiliser l'égalité

$\{X_{n+1} = k\} = \left(\{X_n = k\}\cap\{X_{n+1} = k\}\right) \cup \left(\{X_n = k-1\}\cap\{X_{n+1} = k\}\right)$

Et noter que

- $P_{\{X_n=k\}}(X_{n+1} = k)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans une urne de $n+2$ boules dont $k+1$ sont blanches.
- $P_{\{X_n=k-1\}}(X_{n+1} = k)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne de $n+2$ boules dont k sont blanches.

20 Par définition :

- Z est à valeurs dans $\mathbb{U}_n = \{\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\}$ où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
- Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$: $P(Z = \omega_k) = \dfrac{1}{n}$ (car $\operatorname{Card} U_n = n$)

a) Calculer $E(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k P(Z = \omega_k)$.
Ensuite : $E(\operatorname{Re} Z) = \operatorname{Re}\left(E(Z)\right)$ et $E(\operatorname{Im} Z) = \operatorname{Im}\left(E(Z)\right)$

b) Utiliser le théorème de transfert

$$E(\operatorname{Re} Z \operatorname{Im} Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}(\omega_k)\operatorname{Im}(\omega_k) P(Z = \omega_k)$$

Ensuite utiliser une formule de trigonométrie pour se ramener à une somme du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\theta_k)$ que l'on calcule en utilisant les nombres complexes.

21 En exprimant μ_r à l'aide de la formule de transfert, le terme général $\dfrac{\mu_r x^r}{r!}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de séries exponentielles de paramètres $(k-np)x$.

Réponse : $\displaystyle\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\mu_r x^r}{r!} = e^{-npx}(pe^x + 1 - p)^n$.

22 **1.** C'est une somme géométrique de raison ω^j.

Réponse : $S_j = \begin{cases} k & \text{si } k \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $X_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et :

$$p_n = P(k \mid X_n) = \sum_{\substack{0\le j\le n \\ k\mid j}} P(X_n = j) \underset{\mathbf{1.}}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{S_j}{k} P(X_n = j)$$

En remplaçant S_j par son expression puis en intervertissant les sommes doubles, la somme intérieure (en j) est une somme du binôme, en utilisant ensuite la transformation de $1 + e^{i\theta}$ on obtient $p_n = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} \cos^n\left(\frac{\pi\ell}{k}\right) e^{\frac{in\pi\ell}{k}}$.

Réponse : $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{k}$, *ce qui est conforme à l'intuition*

23 On note E_n l'ensemble $\mathscr{F}([\![1\,,n]\!],[\![1\,,n]\!])$ des applications de $[\![1\,,n]\!]$ dans lui-même.

a) Puisque f_n suit la loi uniforme sur E_n :

$$P(N_n = k) = \frac{\text{nombre d'applications } f \in E_n \text{ ayant } k \text{ points fixes}}{\text{nombre total d'applications de } E_n}$$

Réponse à trouver : $P(N_n = k) = \dbinom{n}{k} \dfrac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$

b) *Réponse à trouver :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(N_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$

24 **1. a)** Utiliser la formule des probabilités totales après avoir constaté que : $P_{\{X_k=i\}}(X_{k+1} - X_k) = \dfrac{2i}{2n-k}$.

b) Remarquer que $X_{k+1} - X_k$ suit une loi de Bernoulli.

2. Reitérer la relation de **1b)** en partant de $E(X_k)$.

Réponse : $E(X_k) = \dfrac{(2n-(k+1))(2n-k)}{2n(2n-1)} n$

25 **1.** Partir de : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$

et utiliser : $P(X = k) = P(X \ge k) - P(X \ge k+1)$

2. a) Prendre pour univers l'ensemble Ω des n-arrangements des n boules de l'urne.
Réaliser $\{X = k\}$ c'est :

- Choisir une k-liste de $[\![1\,,n]\!]$ strictement croissante
- Puis choisir les numéros des $n-k$ dernière boules

Réponse simplifiée : $P(X \ge k) = \dfrac{1}{k!}$

b) Utiliser **1.**. *Réponse :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X) = e - 1$.

26 **1.** Partir de : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} kP(X = k)$

et utiliser : $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$

2. a) Utiliser la **1.** : $E(X_N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} P(X_N > k) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|A_k|}{|\Omega|}$ où :

- A_k est l'événement : « Les n boules tirées ont un numéro supérieur ou égal à $k+1$ »
- $\Omega = [\![1\,,N]\!]^n$ (n tirages successifs avec remise).

Réaliser A_k revient à tirer successivement n boules dans une urne contenant les $N-k$ boules numérotées de $k+1$ à N. *Réponse à trouver :*

$$E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n = N \times \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right)^n\right)}_{S_N}$$

Pour l'équivalent de $E(X_N)$ remarquer que S_N est une somme de Riemann de $t \mapsto (1-t)^n$.

b) Adapter le raisonnement de la question 1 : partir de la formule de transfert $E(X_N^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^2 P(X_N = k)$

et utiliser $P(X_N = k) = P(X_N > k-1) - P(X_N > k)$

c) Utiliser $V(X_N) = E(X_N^2) - E(X_N)^2$:

- Avec **2a)** : (1) $\boxed{E(X_N)^2 = \dfrac{N^2}{(n+1)^2} + o(N^2)}$
- L'expression de **2b)** donne

$$E(X_N^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\left(1 - \frac{k}{N}\right)^N = 2\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} k\left(1 - \frac{k}{N}\right)^N}_{T_N} + E(X_N)$$

En utilisant les sommes de Riemann on trouve : $T_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N^2}{(n+1)(n+2)}$ et

(2) $\boxed{E(X_N^2) = \dfrac{2N^2}{(n+1)(n+2)} + o(N^2)}$

La différence (2) − (1) donne l'équivalent souhaité.

27 **1.** A partir de : $E(X) = \displaystyle\sum_{i\in X(\Omega)} iP(X = i)$, appliquer la formule des probabilités totales pour exprimer $P(X = i)$ en fonction des $P(A_k)$ et intervertir les sommes obtenues.

2. En notant A_k l'événement : « le tirage a lieu dans U_k », l'espérance $E_{A_k}(X)$ s'obtient sans calcul : sachant que le tirage a lieu dans U_k la loi de X est une loi usuelle.
Appliquer ensuite la formule de la **1.**.

Réponse finale : $E(X) = \dfrac{r(n+1)}{2n}$.

28 **1. a)** Appliquer l'inégalité des cordes à la fonction concave $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ entre a et b.

b) Prendre l'espérance de l'inégalité de la question a) (c'est licite : c'est la propriété de croissance de l'espérance) et multiplier par $E(X)$.

On obtient : $E(X)E(\frac{1}{X}) \le \dfrac{f(m)}{ab}$

où $m = E(X)$ et $f : t \mapsto (a+b-t)$.

Reste à montrer que $f(m) \le \frac{(a+b)^2}{4}$.

2. Considérer une variable aléatoire de loi judicieusement choisie et appliquer le résultat de **1.**

29 Poser $m = E(X)$ et $A = \{X \ge am\}$ et montrer :

$$(\star) \quad \forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \le am + X\mathbb{1}_A$$

L'inégalité demandée s'ensuit par croissance de l'espérance.