Calculer des sommes

1 SF 1 Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général u_n :

a) $u_n = 2^{3-5n}$ **b)** $u_n = \dfrac{(1+i)^n}{(1+2i)^n}$ **c)** $u_n = \dfrac{\sin n}{2^n}$

d) $u_n = \dfrac{1}{n^2-n}$ **e)** $u_n = \ln(1-\dfrac{1}{n^2})$ **f)** $u_n = \dfrac{6n+4}{n(n^2-1)}$

g) $u_n = \dfrac{n^2 2^n}{n!}$ **h)** $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n!}$

2 SF 1 Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

3 SF 6 **1.** Déterminer en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$ la nature de

$$\sum\Big(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big)$$

2. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Utilisation des critères de comparaison

4 SF 2 SF 4 Etudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \dfrac{n^5+\ln n}{n^7+1}$ **b)** $u_n = \sin\left(2^{-n}\right)$

c) $u_n = \dfrac{\operatorname{Arctan}(n^5)}{n^2}$ **d)** $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)$

e) $u_n = n^{\frac{1}{n}}$ **f)** $u_n = \dfrac{1}{n n^{1/n}}$

g) $u_n = \left(\dfrac{n}{1+n}\right)^{\sqrt{n}}$ **h)** $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$

i) $u_n = \sin n$ **j)** $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$

k) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$ **l)** $u_n = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

5 SF 2 SF 4 Etudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{n^2}$ **b)** $u_n = \ln(1+\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{n^2}$

c) $u_n = \dfrac{\cos n - \sin n}{n^2}$ **d)** $u_n = 1+\dfrac{3}{n^2}$

e) $u_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n}$ **f)** $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2} - 1$

6 SF 2 SF 4 SF 5 Etudier la nature des séries :

a) $\sum n^3 e^{-n}$ **b)** $\sum \dfrac{\ln n}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

c) $\sum\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **d)** $\sum\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$

e) $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ **f)** $\sum\left(1-\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$ **g)** $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$

7 SF 2 SF 4 Etudier la nature des séries de terme général u_n :

a) $u_n = 2\ln(n^3+3) - 3\ln(n^2+2)$

b) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ **c)** $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

d) $u_n = \sin\left(\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{sh}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$ **e)** $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\frac{3}{2}}}$

8 SF 4 SF 6 Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ la nature de :

a) $\sum\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \alpha\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ **b)** $\sum\cos\left(\operatorname{Arctan} n + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$

9 SF 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1. Etablir : $R_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$.

2. En déduire que la série $\sum \sin(2\pi e n!)$ est divergente.

Utilisation d'une série auxiliaire

10 SF 4 **1.** Déterminer la nature de : $\sum\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

b) En déduire la nature de : $\sum\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$$

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$ lorsque $\alpha \leq 0$ ou $\alpha > 1$.

2. On suppose que $\alpha \in]0,1[$.

a) Montrer que $\sum v_n$ converge.

b) En déduire que $\sum u_n$ converge.

Des DL pour « découper » une série alternée

12 SF 2 SF 6 Etudier la convergence absolue et la convergence des séries de terme général u_n :

a) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ **b)** $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}+\cos n}$ **d)** $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

e) $u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$

13 SF 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier la convergence absolue et la convergence de : **a)** $\sum(-1)^n\sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ **b)** $\sum\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$

14 SF 3 SF 4 SF 6 **1.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Etudier la nature de :

a) $\sum\dfrac{1}{(\ln n)^p}$ **b)** $\sum\dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^p}$

2. Etudier la convergence absolue et la convergence de la série : $\sum\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$

Autour du lien suite-série

15 SF 6 L'objectif est d'établir la formule de Stirling.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\sigma_n = \ln n! - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n + n$.

a) Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

b) En déduire l'existence d'une constante C telle que

$$n! \underset{x\to+\infty}{\sim} C\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$$

2. Montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. *On pourra utiliser l'équivalent* $W_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ *où pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,\mathrm{d}t$.

16 SF 4 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive telle que la série $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que $\sum \ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$ diverge.
2. En déduire que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

17 SF 4 SF 6 On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

1. Prouver que : $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour un certain $\alpha > 0$ à déterminer en fonction de x.
2. Montrer que la série de terme général : $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est convergente.
3. En déduire que : $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ pour une constante $C > 0$, puis déterminer en fonction de x la nature de $\sum u_n$.

Majoration des restes d'une série alternée

18 SF 3 Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

19 SF 3 Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi + t}\,\mathrm{d}t$
3. En déduire que la suite (I_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} I_n \geq 0$.

20 SF 3 SF 4 SF 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

1. Montrer que $R_n + R_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. Déterminer un équivalent de R_n.

21 SF 3 SF 4 SF 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que $(b_n + b_{n+1})$ converge vers une limite $\ell < 0$.
2. Etudier la nature de $\sum \frac{1}{b_n}$.

Comparaison série intégrale

22 SF 7 Pour tout $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Montrer que : $\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$.

23 SF 7 Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2a}$.

24 SF 8 Soit $\alpha > 1$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive telle que $\sum u_n$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

25 SF 8 SF 10

1. Montrer la convergence de la série : $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$
2. Avec la même technique, montrer : $R_n \sim \frac{1}{\ln n}$.

26 SF 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.
Trouver un équivalent de R_n.

27 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^n |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M$.

1. Montrer que la série $\sum \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge
2. En déduire que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Plus abstraits

28 SF 4 *cf. Ex. 39, banque INP*
On note E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que pour tous réels a et b : $2|ab| \leq a^2 + b^2$.
2. Montrer que pour toutes suites $u, v \in E$, la série de terme général $u_n v_n$ est convergente.
3. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

29 SF 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$ convergent.

30 SF 6 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent.
Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

31 SF 4 *Ex. 6, banque INP*
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive telle que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$

1. a) Démontrer qu'il existe $q \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \leq q u_n$$
   b) En déduire : $\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$.
   c) En déduire que la série de terme général u_n converge.
2. *Application*. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$?

32 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante réelle.
On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   a) Etudier $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n$ b) En déduire : $nu_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

33 SF 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge. *Indication : montrer que pour tout $\beta < \alpha$, la suite $(n^\beta u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir d'un certain rang.*

34 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, strictement positive, croissante et tendant vers $+\infty$. Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \frac{v_n}{u_n}$ converge. Montrer que : $\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.