1 **a)** Faire apparaître une série géométrique. *Réponse :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{256}{31}$

b) Il s'agit d'une série géométrique de raison $q = \dfrac{1+i}{1+2i}$.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2-i$

c) Passer en complexe : $u_n = \mathrm{Im}\Big(\dfrac{e^{in}}{2^n}\Big)$. La série est ainsi la partie imaginaire d'une série géométrique.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{2\sin 1}{5-4\cos 1}$

d) Faire apparaître une série télescopique avec :

$\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. *Réponse :* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1.$

e) On peut calculer la somme partielle en utilisant les propriétés du logarithme puis en séparant les sommes et en simplifiant les termes communs. Pour $n \geq 2$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - \ln 2$. *Réponse :* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln 2.$

f) Par D.E.S. $u_n = \dfrac{-4}{n} + \dfrac{5}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$.
On peut ainsi calculer les sommes partielles.

Réponse : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{11}{2}.$

g) Faire apparaître des séries exponentielles en écrivant $n^2 = n\big((n-1)+1\big)$ au numérateur puis en séparant les sommes. *Réponse* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 6e^2.$

h) Faire apparaître des séries exponentielles en écrivant $n^2 = n(n-1)+n$ au numérateur puis en séparant les sommes. *Réponse* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 2e.$

2 A l'aide d'une D.E.S.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \times \frac{1}{2^k} - \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{2^{k+1}}$$

La somme n'est pas télescopique.
On peut la mettre sous forme intégrale en remplaçant $\dfrac{1}{2n+1}$ par $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$ et $\dfrac{1}{n+1}$ par $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$.
La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître deux sommes géométrique.
On obtient finalement, après simplifications

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{2-t^2}\Big(2 - \frac{t^{2n+2}}{2^n}\Big)\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{2-t}\Big(1 - \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}}\Big)\mathrm{d}t$$

On conclut de façon usuelle en séparant la partie qui dépend de n :

$$S_n = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t-2}\,\mathrm{d}t}_{I} - \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{t^2-2}\,\mathrm{d}t}_{J}$$

$$-\frac{1}{2^n}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2-t^2} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t}_{K_n} + \frac{1}{2^{n+1}}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2-t} t^{n+1}\,\mathrm{d}t}_{L_n}$$

puis :

- On calcule I et J (à l'aide d'une D.E.S pour J)
- On montre que K_n et L_n tendent vers 0 en encadrant l'intérieur (ou on montre qu'elles sont bornées ce qui suffit ici)

Réponse : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2 + \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

3 Mettre $\ln n$ en facteur puis utiliser le DL de $\ln(1+x)$:

$$u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = (1+a+b)\ln n + \underbrace{\frac{a+2b}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}_{w_n}$$

- Si $1+a+b \neq 0$ alors $u_n \sim (1+a+b)\ln n \not\to 0$.
- Si $1+a+b=0$ *i.e.* si $a+b=-1$, alors $u_n = w_n$ d'où :
  - Si $a+2b \neq 0$: $u_n \sim \frac{a+2b}{n}$ et $\sum u_n$ DV.
  - Si $a+2b=0$: $u_n = O(\frac{1}{n^2})$ et $\sum u_n$ CV.

La série converge ssi $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ *i.e.* $a=-2$ et $b=1$.

4 *N.B.* Ici les séries sont de signes constants donc les critères de convergence par majoration ou équivalence sont licites.

a) Convergente : $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

b) Convergente : $u_n \sim \frac{1}{2^n}$.

c) Convergente $u_n \sim \frac{\pi}{2n^2}$ ou $u_n \leq \frac{\pi}{2n^2}$.

d) Convergente $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$.

e) Grossièrement divergente : $u_n \to 1$

f) Divergente : $u_n \sim \frac{1}{n}$

g) Grossièrement divergente : $u_n \to 1$

h) Convergente : $u_n \sim e^{-n}$.

i) Grossièrement divergente.

j) Divergente : $u_n \geq \frac{1}{n}$.

k) Divergente : $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

l) Convergente : $u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

5 **a)** Convergente (somme de deux séries convergente).

b) Divergente : $u_n \sim \frac{1}{n}$

c) Absolument convergente : $|u_n| \leq \frac{2}{n^2}$.

d) Grossièrement divergente.

e) Divergente : $u_n \sim \frac{1}{4\sqrt{n}}$ (par quantité conjuguée ou en factorisant par $\sqrt{n}$ puis en utilisant le DL de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$)

f) Divergente : $u_n \sim \frac{1}{n}$ (en revenant à l'exponentielle écrire $u_n = e^{v_n} - 1$ et montrer que $v_n \sim \frac{1}{n}$ puis utiliser l'équivalent de $e^x - 1$ en 0)

6 *On peut appliquer la méthode du savoir-faire* SF 5 :

- *On revient à l'exponentielle :* $u_n = e^{v_n}$.
- $\lim v_n \neq -\infty$ *: il y a divergence grossière.*
- *Si* $\lim v_n = -\infty$, *on peut essayer de montrer que* $n^2 u_n \to 0$:
  - *On revient à l'exponentielle :* $n^2 u_n = e^{2\ln n + v_n} = e^{w_n}$.
  - *Montrer que* $n^2 u_n \to 0$ *revient à montrer que* $w_n \to -\infty$.

a) Convergente : $n^2 u_n \to 0$.

b) Convergente : $u_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$ puis $n^{\frac{3}{2}} u_n \to 0$.

c) Convergente : montrer que $n^2u_n \to 0$.
Pour cela écrire n^2u_n sous forme exponentielle
$$n^2u_n = e^{2\ln n}e^{n^2\ln(\frac{n}{n+1})} = e^{w_n}$$
Il s'agit alors de montrer que $w_n \to -\infty$.
Pour cela, chercher un équivalent de w_n, on trouve $w_n \sim -n \to -\infty$.

d) Convergente : montrer que $n^2u_n \to 0$.
Pour cela écrire n^2u_n sous forme exponentielle
$$n^2u_n = e^{2\ln n}e^{n^3\cos(\frac{1}{n})} = e^{w_n}$$
Il s'agit alors de montrer que $w_n \to -\infty$.
Pour cela, chercher un équivalent de w_n, on trouve $w_n \sim -\frac{n}{2} \to -\infty$.

e) Convergente : montrer que $n^2u_n \to 0$.
Pour cela écrire n^2u_n sous forme exponentielle
$$n^2u_n = e^{2\ln n}e^{-\ln n\ln(\ln n)} = e^{w_n}$$
Il s'agit alors de montrer que $w_n \to -\infty$ (factoriser par $\ln n$)

f) Convergente : montrer que $n^2u_n \to 0$.
Pour cela écrire n^2u_n sous forme exponentielle
$$n^2u_n = e^{2\ln n}e^{\sqrt{n}\ln(1-\frac{1}{\ln n})} = e^{w_n}$$
Il s'agit alors de montrer que $w_n \to -\infty$.
Pour cela, chercher un équivalent de w_n, on trouve $w_n \sim -\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \to -\infty$.

g) Ici :

- $u_n \to 0$ donc il n'y a pas divergence grossière : mais cela ne permet pas de dire que la série converge
- $n^2u_n = e^{\ln n - \sqrt{\ln n}} \to +\infty$ mais cela ne permet pas non plus de dire que la série diverge.

En revanche on montre que $nu_n \to +\infty$ (revenir aux exponentielles) ce qui assure que $\sum u_n$ diverge.

7 **a)** Convergente : $u_n \sim \frac{-6}{n^2}$ (factoriser par n^3 dans le log dans le premier terme et par n^2 dans le deuxième terme et utiliser le DL de $\ln(1+x)$)

b) Convergente $u_n \leq \frac{2}{n^2}$ dès que $n \geq 2$ en majorant judicieusement $n!$.

c) Divergente : $u_n \sim \frac{e}{2n}$. Revenir à l'exponentielle puis mettre e en facteur : $u_n = -e(e^{v_n} - 1)$ où $v_n = n\ln(1+\frac{1}{n}) - 1$. Chercher alors un équivalent de v_n. On trouve $v_n \sim -\frac{1}{2n}$ puis utiliser l'équivalent en 0 de $e^x - 1$.

d) Convergente : en utilisant les DL on montre que $u_n = O(\frac{1}{n^3})$.

e) Divergente : par croissance de l'intégrale (en minorant l'intérieur) on trouve $u_n \geq \frac{n}{1+(2n)^{\frac{3}{2}}} = v_n$ et $\sum v_n$ diverge car $v_n \sim \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}$.

8 **a)** A l'aide de DL on trouve
$$u_n = \ln(1+\frac{1}{n}) - \alpha\sin\frac{1}{n} = \frac{1-\alpha}{n} + w_n$$
où $w_n = O(\frac{1}{n^2})$. Distinguer deux cas :

- Si $\alpha = 1$ alors $u_n = O(\frac{1}{n^2})$ donc la série est convergente.
- Si $\alpha \neq 1$, alors $u_n \sim \frac{1-\alpha}{n}$ et la série est divergente.

b) En utilisant $\operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$ on obtient :
$$u_n = \cos(\operatorname{Arctan} n + \frac{1}{n^\alpha}) = \sin\Big(\operatorname{Arctan}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}\Big) = \sin v_n$$

Ainsi $u_n \sim v_n$ donc la série est de même nature que $\sum \operatorname{Arctan}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha > 1$: $v_n \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.
- Si $\alpha < 1$: $v_n \sim -\frac{1}{n^\alpha}$ donc la série diverge.
- Si $\alpha = 1$, avec un DL de Arctan : $v_n = O(\frac{1}{n^3})$ donc la série converge.

9 **1.** Appliquer une formule de Taylor à exp entre 0 et 1 :

- *Option 1*. On peut écrire $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + R_{n+1}$ puis majorer $|R_{n+1}| = \left|e^1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\right|$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à exp à l'ordre $n+1$.
- *Option 2*. Exprimer directement $R_n = \left|e^1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right|$ sous la forme d'une intégrale avec la formule de Taylor avec reste intégral puis chercher un équivalent de l'intégrale obtenue par intégration par parties.

2. Ecrire : $\quad e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + R_n$.

10 **1.** On peut utiliser le critère d'équivalence pour les séries à termes **positifs** :
$q = (2-\sqrt{3}) \in]-1,1[$ donc $q^n \to 0$ et $\sin(\pi q^n) \sim \pi q^n$ (terme général **positif**d'une série géométrique convergente)

2. a) Développer avec la formule du binôme :
$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k 2^{n-k}\Big(\underbrace{1+(-1)^k}_{0 \text{ si } k \text{ est impair}}\Big)$$
les termes d'indices impairs se simplifient [1], la somme se réduit aux termes d'indices pairs *i.e.* les $k = 2p$:
$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \underbrace{\Big(\sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}3^p 2^{n-2p}\Big)}_{A_n\in\mathbb{N}}\times 2 = 2A_n$$

b) *N.B. Ici on ne peut pas reproduire le raisonnement de la a) car $(2+\sqrt{3})^n \not\to 0$ donc impossible d'utiliser l'équivalent de $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ en 0. L'idée est d'exploiter la question a) pour se ramener à la question 1.*
Utiliser la a) : $\quad \pi(2+\sqrt{3})^n = 2A_n\pi - (2-\sqrt{3})^n$.
Utiliser ensuite la 2π périodicité et l'imparité du sinus pour se ramener à la question 1.

11 **1.** Ce sont les cas « simples », il y a :

- divergence grossière si $\alpha < 0$
- convergence absolue si $\alpha > 1$.

2. a) En simplifiant l'expression on obtient :
$$v_n = (-1)^n\underbrace{\Big(\frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\Big)}_{a_n} = (-1)^n a_n$$
Appliquer alors le théorème concernant les séries alternées (en vérifiant les conditions sur (a_n)).

b) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite.

1. On peut toujours séparer termes pairs et impairs : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{0\leq 2p\leq n} a_{2p} + \sum_{0\leq 2p+1\leq n} a_{2p+1}$. Dans notre cas le « paquet » des termes impairs est nul

- Pour (S_{2n}) : séparer les termes d'indices impairs $k = 2p-1$ et pairs $k = 2p$:
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{p=1}^{n} u_{2p-1} + \sum_{p=1}^{n} u_{2p} = \sum_{p=1}^{n} v_p$$
puis utiliser la question a).
- Pour (S_{2n+1}), il suffit d'écrire $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$.

12 *Attention, u_n n'est pas de signe constant donc :*

- *le critère d'équivalence n'est pas permis pour étudier la convergence*
- *on peut par contre utiliser un équivalent sur $|u_n|$ pour la convergence absolue*
- *S'il n'y a pas convergence absolue, utiliser les DL (cf.* **SF 6** *)*

a) Pas absolument convergente : $|u_n| \sim \frac{1}{n}$.
Convergente : le DL de $\ln(1+x)$ permet d'écrire
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + w_n \quad \text{où} \quad w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée + une série justiciable du théorème de convergence par domination).

b) Pas absolument convergente : $|u_n| \sim \frac{1}{n}$.
Convergente : le DL de $\tan x$ permet d'écrire $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + w_n$ où $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$.
$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée + une série justiciable du théorème de convergence par domination).

c) Pas absolument convergente : $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.
Convergente : le DL de $\tan x$ permet d'écrire :
$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + w_n$ où $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$.
$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée + une série justiciable du théorème de convergence par domination).

d) S'inspirer de la technique utilisée en cours pour l'Ex. 46, banque INP. On montre que $u_n = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{n} + w_n$ où $w_n = O(\frac{1}{n^3})$. Cette expression permet de montrer que $\sum u_n$ converge et qu'il n'y a pas convergence absolue.

e) Factoriser par $\sqrt{n}$ puis utiliser le DL de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.
On obtient $u_n = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$.
Cette expression permet de montrer que $\sum u_n$ converge et qu'il n'y a pas convergence absolue.

13 *Attention, u_n n'est pas de signe constant donc :*

- *le critère d'équivalence n'est pas permis pour étudier la convergence*
- *on peut par contre utiliser un équivalent sur $|u_n|$ pour la convergence absolue*
- *Lorsqu'il n'y a pas convergence absolue : utiliser les DL (voir* **SF 6** *)*

a)
- *Convergence absolue.* $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ donc il y a convergence absolue ssi $\alpha > \frac{3}{2}$.
- *Convergence* L'équivalent ci-dessus montre aussi que la série diverge grossièrement lorsque $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, le DL de $\operatorname{sh} x$ permet d'écrire
$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}}_{v_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3\alpha-\frac{1}{2}}}\right)}_{w_n}$$
$\sum u_n$ est donc la somme de deux séries convergentes (une série alternée et une série justiciable du théorème de convergence par domination).

b)
- *Convergence absolue.* $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ donc il y a convergence absolue ssi $\alpha > 1$.
- *Convergence* Mettre $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en facteur puis utiliser le DL de $\frac{1}{1+x}$.
On obtient $u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}$.
La série $\sum v_n$ est convergente (série alternée).
Ainsi $\sum u_n$ est de même nature que $\sum w_n$. Or : $w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

14 **1. a)** Divergente : $n \times \frac{1}{(\ln n)^p} \to +\infty$ donc $\frac{1}{(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n}$ APCR.
b) Convergente : (série alternée).
2. Il n'y a pas convergence absolue : $|u_n| \sim \frac{1}{\ln n}$.
Pour la convergence, factoriser par $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ puis utiliser le DL de $\frac{1}{1+x}$. On trouve :
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln n}}_{v_n} + \underbrace{-\frac{1}{\ln n^2} + o\left(\frac{1}{\ln n^2}\right)}_{w_n}$$
Avec la question a), $\sum v_n$ converge et $w_n \sim \frac{1}{\ln n^2}$ donc $\sum w_n$ diverge. La série est donc divergente.

15

16 **1.** Il s'agit d'une série télescopique $\sum \ln S_{n-1} - \ln S_n$, il suffit d'utiliser le théorème relatif à ce type de série.
2. Remarquer que $\ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$.

17 **1.** $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Avec la définition de u_n on trouve : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{x}\ln(1+\frac{x}{n+1})$.
Un DL de $\ln(1+u)$ donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \underbrace{- \frac{x}{2(n+1)} + O(\frac{1}{n^2})}_{=w_n}$.
Un nouveau DL de $\ln(1+w)$ donne ensuite
$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{x}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
2. Le résultat de la 1 et un DL de $\ln(1+x)$ donne $v_n = O(\frac{1}{n^2})$.
3. Il s'agit de montrer que $n^\alpha u_n \to C > 0$.
Utiliser un télescopage avec la question 2 :
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \ln(u_{k+1}) - \ln u_k = v_k - \alpha \ln(1 + \frac{1}{k})$$
En sommant pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ on obtient :
$$\ln(u_n) = \ln u_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) - \alpha \ln n.$$
Ainsi $\ln(n^\alpha u_n) = \ln u_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)$ qui a une limite finie L vu que $\sum v_k$ converge.
Ainsi $n^\alpha u_n \to C = e^L > 0$.
La série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Réponse : $\sum u_n$ *CV ssi* $x > 2$.

18 Il s'agit de la somme d'une série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ mais (a_n) n'est décroissante qu'à partir du rang 1. En conséquence, le signe ainsi que la majoration des restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ ne valent que pour $n \geq 1$. « Sortir » les deux premiers termes de S puis majorer $R_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k a_k$ à l'aide du théorème des séries alternée (SF 3)

19 **1.** Justifier que $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, n\pi]$.

2. Découper l'intégrale comme une somme d'intégrales sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ puis effectuer le changement de variable $t = k\pi + x$.

3. Utiliser le théorème des séries alternées pour justifier la convergence. La positivité de la limite s'obtient en exprimant la limite en fonction de R_0 puis en utilisant l'encadrement de R_0 fourni par le théorème des séries alternées.

20 **1.** Commencer par montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k(k+1)}$ puis appliquer la majoration des restes fournie par le théorème des séries alternées (SF 3) pour majorer $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k(k+1)} \right|$.

2. Simplifier $R_n - R_{n+1}$ puis combiner avec le résultat de **1.**.

On obtient : $\quad R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

21 **1.** Remarquer que $b_n + b_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ (quantité conjuguée) pour faire apparaître une série alternée. Pour le signe de la limite utiliser la majoration des restes fournie par le théorème des séries alternées (SF 3) pour minorer $R_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

2. Poser $u_n = b_n + b_{n+1}$ et remarquer que :

- La question **1.** assure que $u_n \sim \ell$.
- $b_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n+1}}{2} + \dfrac{u_n}{2}$

En factorisant par $\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ montrer alors que

$$\frac{1}{b_n} = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} \underbrace{- \frac{2u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)}_{=w_n}$$

ce qui permet de montrer que $\sum \dfrac{1}{b_n}$ diverge.

22 On écrit $\zeta(\alpha) = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ puis on encadre S_n à l'aide d'une comparaison série-intégrale en partant de

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

Tous calculs faits on obtient

$$\frac{1 - (n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq S_n \leq 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

Conclure ensuite par passage à la limite $n \to +\infty$ puis encadrement (version équivalents) pour $\alpha \to 1^+$.

23 La comparaison série-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2}$ sur $[1, +\infty[$ pour écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^2 + a^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2 + a^2}\,dt \leq \frac{1}{k^2 + a^2}$$

permet tous calculs faits de montrer que

$$\frac{1}{a}\left(\operatorname{Arctan} \frac{n+1}{a} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{a}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + a^2}$$
$$\leq \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{a}\left(\operatorname{Arctan} \frac{n}{a} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{a}\right)$$

Conclure ensuite par passage à la limite $n \to +\infty$ puis encadrement pour $a \to 1^+$.

24 Exploiter la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ pour montrer que pour tout $k \geq 1$: $\quad \dfrac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \displaystyle\int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$.

Adapter ensuite la technique de comparaison série-intégrale pour montrer la convergence de $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

25 **1.** La comparaison série-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ sur $[2, +\infty[$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt \leq \frac{1}{k(\ln k)^2}$$

et permet tous calculs faits de montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$$

La série est donc majorée. Puisqu'elle est à termes positif elle est convergente (par théorème).

2. Pour encadrer $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(\ln k)^2}$, repartir de l'encadrement

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt \leq \frac{1}{k(\ln k)^2}$$

et suivre le savoir-faire SF 10.

Tous calculs faits on obtient

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{\ln n}$$

qui conduit au résultat demandé.

26 La décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sur $[1, +\infty[$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\,dt \leq \frac{1}{k^3}$$

Fixer d'abord $n \geq 1$ et $N \geq n$ (N est destiné à tendre vers $+\infty$) et sommer les inégalités ci-dessus.

Passer ensuite à la limite dans les inégalités pour $N \to +\infty$.

Réponse : $\quad R_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$

27 **1.** Posant $a_k = \displaystyle\int_k^{k+1} (k+1-t) f'(t)\,dt$, on peut montrer que $\sum a_k$ converge absolument en majorant les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ par M.

2. Intégrer $\int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t)\,dt$ par parties puis sommer pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

28 **1.** Développer $0 \leq (|a|-|b|)^2$.

2. La 1 assure que $\sum u_n v_n$ converge absolument.

3. Il s'agit de montrer que

- E possède la suite nulle $u = (0)_{n\in N}$ *i.e.* que $\sum 0^2$ converge.
- E est stable par combinaison linéaire. Fixer $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et montrer que $w = \lambda u + \mu v \in E$.
  Il s'agit de montrer que la série $\sum w_n^2$ converge : développer w_n^2 et justifier la convergence de tous les morceaux.

29 La série est à termes positifs donc on peut utiliser tous les critères de comparaison (y compris inégalités et équivalents).

- *Convergence de* $\sum u_n^2$. Deux possibilités (au moins) :
  - *Méthode 1 :* On justifie que $u_n^2 = o(u_n)$.
  - *Méthode 2 :* On justifie que $u_n^2 \leq u_n$ APCR.
- *Convergence de* $\sum v_n$ *où* $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que $v_n \sim u_n$.

30 *Attention : ici u_n n'est pas de signe constant donc le critère d'équivalence et la majoration ne sont pas permis pour étudier la convergence.* Utiliser le DL de $\frac{1}{1+x}$, on obtient $\frac{u_n}{1+u_n} = u_n + w_n$ où $w_n = O(u_n^2)$.

31 **1. a)** Ecrire $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ en revenant à la définition de la limite puis fixer ε tel que $q = \ell + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$).

b) Par récurrence sur $n \geq n_0$.

c) La b) assure qu'APCR $u_n \leq Cq^n$ et $q \in]-1, 1[$ donc la série géométrique $\sum q^n$ converge.

2. Appliquer le critère démontré à la question 1 : pour montrer que $\sum u_n$ converge il suffit de montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$.
Ici on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$.

32 *N.B.* La suite (u_n) est décroissante et tend vers 0 (car $\sum u_n$ converge) donc elle est en particulier positive.

1. a) Par hypothèse (S_n) admet une limite finie S.

b) Minorer « l'intérieur » de $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ à l'aide de la décroissance de u

2. Il s'agit de montrer que la suite $v = (nu_n)$ tend vers 0.
La question 2 assure que $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par théorème il suffit de montrer que $v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On peut adapter la démarche de la question 2 mais il y a plus rapide en utilisant la décroissance de u : $v_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = v_{2n} + u_{2n}$.
Le résultat en découle par encadrement.

33 Suivre d'abord l'indication en montrant que pour $\beta < \alpha$, la suite $v = (n^\beta u_n)$ est décroissante APCR.
Calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n} = (1+\frac{1}{n})^\beta \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
L'hypothèse de l'énoncé et un DL de $(1+\frac{1}{n})^\beta$ à l'ordre 1 conduisent à $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{\beta-\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$.
Ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \sim \frac{\beta-\alpha}{n} < 0$.

Ensuite la décroissance APCR de v assure qu'à partir d'un certain n_0 : $v_n \leq v_{n_0}$ ce qui donne une majoration de la forme $u_n \leq \frac{C}{n^\beta}$.
Il suffit de choisir un $\beta \in]1, \alpha[$ pour assurer la convergence de $\sum \frac{1}{n^\beta}$ et donc celle de $\sum u_n$.

34 Par hypothèse $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{u_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'idée est d'exprimer $\frac{1}{u_n}\sum_{k=0}^{n} v_k$ à l'aide de ces restes.

Pour $n \geq 1$: $\frac{v_n}{u_n} = R_{n-1} - R_n$ donc $v_n = u_n(R_{n-1} - R_n)$.
Remplacer v_n par cette expression, puis en séparer les sommes, réindexer pour faire apparître R_k dans chaque somme et regrouper ensuite les sommes. On obtient

$$\frac{1}{u_n}\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{v_0}{u_n} + \frac{u_1 R_0}{u_n} - R_n + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)R_k}_{a_n}$$

Les hypothèses de l'énoncé assurent que

$$\frac{v_0}{u_n} + \frac{u_1 R_0}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il reste à montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Revenir pour cela à la définition de la limite.
Fixer $\varepsilon > 0$ et, vu que $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$: $\quad |R_n| \leq \varepsilon$.

Ensuite $|a_n| \leq \frac{1}{u_n}\sum_{k=1}^{n-1} |(u_{k+1}-u_k)R_k|$.

Pour $n \geq n_0$, couper la somme en deux en l'indice $k = n_0 - 1$:

- $\frac{1}{u_n}\sum_{k=1}^{n_0-1} |(u_{k+1}-u_k)R_k|$ est de la forme $\frac{1}{u_n} \times \text{Cst}$ donc il est de limite nulle et par conséquent majorable par ε à partir d'un certain rang $n_1 \geq n_0$.
- Dan s $\frac{1}{u_n}\sum_{k=n_0}^{n-1} |(u_{k+1}-u_k)R_k|$, la croissance de la suite u permet d'écrire
  $$|(u_{k+1}-u_k)R_k| = (u_{k+1}-u_k)|R_k| \leq (u_{k+1}-u_k)\varepsilon$$
  et donc par télescopage de majorer le tout par $\frac{u_n - u_{n_0}}{u_n}\varepsilon \leq \varepsilon$.

Les considérations précédentes permettent de majorer $|a_n|$ par 2ε pour $n \geq n_1$.