**1** Faire apparaître des sommes de Riemann.

1. On trouve $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$
   Reste ensuite à calculer l'intégrale.
2. $\ln(w_n)$ est une somme de Riemann.
   On trouve $\ln w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t)\,dt$.
   Reste ensuite à calculer l'intégrale, puis à prendre l'exponentielle de la valeur obtenue.
   *Réponse finale :* $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{e}$.
3. Faire apparaître une somme de Riemann en posant $k = n + j$. (On peut aussi procéder par comparaison somme-intégrale).
   *Réponse.* $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

**2** *Réponse* $S_n \sim \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$.

**3** On peut se ramener à une somme de Riemann de la fonction $fg$ en écrivant :
$$g\left(\frac{k+1}{n}\right) = g\left(\frac{k}{n}\right) + \left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
On a alors
$$u_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k}{n}\right)}_{v_n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{r_n}$$

- $v_n$ est une somme de Riemann : $v_n \to \int_0^1 fg$
- Il reste à montrer que $r_n$ tend vers 0.
  Avec l'inégalité triangulaire, on peut majorer $|r_n|$ en utilisant une inégalité du type :
  $$\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le M \times \frac{1}{n}$$
  Pour cela, commencer par appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $g$ (en justifiant que $g'$ est bornée)

**4** Fixer $r \notin \{\pm 1\}$.
$I = \int_0^\pi f(\theta)\,d\theta$ où la fonction $f : \theta \mapsto \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)$ est définie sur $[0,\pi]$.
Par le théorème sur les sommes de Riemann $I = \lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ où
$$S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\right)$$
Reste à calculer le produit : $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.
Pour cela factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 1$.
On trouve : $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(r^2 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = (r^{2n} - 1) \times \frac{r-1}{r+1}$.
Il suffit enfin de calculer la limite de la quantité obtenue lorsque $n \to +\infty$.
Distinguer les cas $|r| > 1$ et $|r| < 1$ on trouve :
$$\lim_{x\to+\infty} S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \pi\ln r^2 & \text{si } |r| > 1 \end{cases}$$

**5** 1. Fixer $n \ge 1$ et $k \in [\![0,n]\!]$ et appliquer le théorème de la bijection à $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ pour assurer l'existence d'une unique solution à l'équation $F(x) = \frac{k}{n}I$ avec $I = \int_a^b f$.

2. En remarquant au départ que
$$\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}I\right)$$
on peut faire apparaître une somme de Riemann de $F^{-1}$ et ainsi obtenir
$$\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{I}\int_0^I F^{-1}(y)\,dy \quad \left(\text{où} \quad I = \int_a^b f\right)$$
Le résultat demandé s'obtient en effectuant le changement de variable $y = F(t)$ dans l'intégrale.

**6** **a)** Il s'agit d'une somme de Riemann de la fonction $f$ : $t \mapsto t\ln t$ sur $]0,1]$, prolongée par continuité en posant $f(0) = 0$. La limite est l'intégrale $\int_0^1 t\ln t\,dt$.
L'intégrale se calcule par intégration par parties mais la fonction ln n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (problème en 0).
Pour faire les calculs proprement, calculer $\int_\varepsilon^1 t\ln t\,dt$ pour $\varepsilon \in ]0,1[$ par IPP puis faire tendre $\varepsilon$ vers 0 dans le résultat obtenu.
*Réponse :* $-\frac{1}{4}$

**b)** En écrivant $k = \frac{k}{n} \times n$ on fait apparaître la somme de la première question :
$$\sum_{k=1}^{n} k\ln k = n^2 \times \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}\right)}_{=-\frac{1}{4}+o(1)} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}\ln n}_{=\frac{n^2}{2}\ln n + o(n^2)} = -\frac{n^2}{4} + \frac{n^2\ln n}{2} + o(n^2)$$

**7** Ecrire l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann :
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n \quad \text{où :} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\right).$$
Par l'inégalité de Jensen : $\quad S_n \ge f\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\right)$

Calculer la somme $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n}\right)$ puis passer à la limite dans l'inégalité précédente.

**8** **1. a)** En écrivant :
$$n\sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_j v_j \quad \text{et} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j$$
la différence vaut : $\sum\limits_{1\le i,j\le n}(u_j - u_i)v_j$
séparer la somme en deux $\sum\limits_{1\le i<j\le n}$ et $\sum\limits_{1\le j<i\le n}$ puis renommer $(i,j)$ en $(j,i)$ dans la deuxième somme (indices muets) et regrouper de nouveau les deux sommes.

**b)** Par hypothèse : $(u_j - u_i)(v_j - v_i) \ge 0$ lorsque $i \le j$.

**2.** Faire apparaître des somme de Riemann en appliquant le résultat de **1b)** avec $u_k = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $v_k = g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ puis passer à la limite.

**9** Fixer $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et appliquer la formule de Taylor à reste intégral à sin entre 0 et $x$ à l'ordre 3 puis à l'ordre 5.

**10** Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1.
Il s'agit de calculer $\left|f^{(n+1)}\right|$ puis d'en trouver un majorant $M_{n+1}$.
On trouve $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ donc on peut prendre $M_{n+1} = n!$.

**11** **a)** Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange

**b)** En écrivant : $\sin \dfrac{k\pi}{n^2} = \dfrac{k\pi}{n^2} + \left(\sin \dfrac{k\pi}{n^2} - \dfrac{k\pi}{n^2}\right)$ on obtient

$$u_n = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi k}{n} \sin \frac{k\pi}{n}\right)}_{S_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi k}{n} \sin \frac{k\pi}{n}\left(\sin \frac{k\pi}{n^2} - \frac{k\pi}{n^2}\right)\right)}_{R_n}$$

Dès lors :

- On calcule la limite de $S_n$ en utilisant les sommes de Riemann de $x \mapsto x \sin x$ sur $[0, \pi]$.
- On montre que $R_n \to 0$ en majorant $|R_n|$ avec la question a) qui permet de majorer $\left|\dfrac{k\pi}{n^2} - \sin \dfrac{k\pi}{n^2}\right|$

*Réponse :* $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

**12** **a)** Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à exp entre 0 et $x$ à l'ordre $n = 1$.

**b)** En vue d'appliquer la question a), écrire :

$$e^{\frac{1}{n+k}} = \left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right) + \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$$

Ce qui donne :

$$u_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right)}_{R_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}_{S_n}$$

Ensuite :

- La question a) permet de majorer $|R_n|$ e de montrer que $R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- On fait apparaître une somme de Riemann pour calculer la limite de $S_n$.

*Réponse :* $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2$

**13** Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ et minorer le reste intégral avec l'hypothèse sur $f^{(n)}$.

**14** **a)** Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à sin entre 0 et $x$ à l'ordre $n = 2$ pour majorer $|\sin x - x|$ puis substituer $x$ par $\dfrac{1}{n} \sin t$.

**b)** En vue d'appliquer la question a), écrire :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\sin t\right) = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\sin t\right) - \frac{1}{n}\sin t\right) + \left(\frac{1}{n}\sin t\right)$$

Ce qui donne :

$$u_n = \underbrace{n\int_0^{\pi}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\sin t\right) - \frac{1}{n}\sin t\right)\mathrm{d}t}_{K_n} + \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t$$

La question a) permet de majorer $|K_n|$ et de montrer que $K_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
*Réponse :* $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$

**15** **a)** Fixer $x > 0$ et appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 :

- Entre $x$ et $x+h$ pour majorer : $\underbrace{\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right|}_{=|A|}$
- Entre $x$ et $x-h$ pour majorer : $\underbrace{\left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right|}_{=|B|}$

Ajouter les deux inégalité obtenues puis utiliser les inégalités triangulaires en commençant par

$$|A| + |B| \geq |B - A|$$

**b)** Etudier la fonction $\varphi : h \mapsto \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$.

**16** La suite $(S_n)$ est croissante.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $a$ et $x \in [0,1]$, montrer que $M_0 \leq \dfrac{M_k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conclure ensuite en utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e$.

**17** Ecrire $u_n$ comme l'intégrale d'une somme en utilisant $\dfrac{1}{2k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$.
La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

On obtient : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{K_n}$.

Il reste :

- A calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
- A montrer que $K_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ en encadrant l'intérieur.

*Réponse :* $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$

**18** **1.** Ecrire $S_n$ comme l'intégrale d'une somme en utilisant $\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} = \displaystyle\int_0^x t^{2k}\,\mathrm{d}t$.
La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

**2.** On obtient : $S_n = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \underbrace{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{K_n}$.

Il reste :

- A calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
- A montrer que $K_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ en encadrant l'intérieur.

*Réponse :* $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Arctan} x$

**19** **1.** Mettre la somme sous forme intégrale en utilisant $\dfrac{1}{a+kb} = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1+kb}\,\mathrm{d}t$.
La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.
On obtient finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 t^{a-1} \frac{t^{(n+1)b}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t}_{K_n}$$

Il reste à montrer que $K_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en encadrant l'intérieur.

**2.** La **1.** assure que la limite existe et vaut $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

On calcule $I$ par une D.E.S :

- D.E.S. $\dfrac{1}{1+X^3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+X} + \dfrac{1}{3}\dfrac{-X+2}{X^2-X+1}$
- On primitive les morceaux, pour le second faire apparaître $\frac{u'}{u}$ :

$$\frac{t-2}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}\frac{2t-4}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{2t-1}{t^2-t+1}}_{\frac{u'}{u}} - \frac{3}{2}\underbrace{\frac{1}{t^2-t+1}}_{\text{forme canonique}}$$

**20** A l'aide d'une D.E.S.

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+1}$$

La somme n'est pas télescopique.
On peut la mettre sous forme intégrale en remplaçant $\dfrac{1}{3k-1}$ par $\displaystyle\int_0^1 t^{3k-2}\,\mathrm{d}t$ et $\dfrac{1}{3k+1}$ par $\displaystyle\int_0^1 t^{3k}\,\mathrm{d}t$.
La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.
On obtient finalement, après simplifications

$$S_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2}(1-t^{3n})\,\mathrm{d}t$$

On conclut de façon usuelle en séparant la partie qui dépend de $n$ :

$$S_n = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t}_{I} - \underbrace{\int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2}\times t^{3n}\,\mathrm{d}t}_{K_n}\Bigg)$$

puis :

- On calcule $I$ à l'aide d'une D.E.S
- On montre que $K_n$ tend vers 0 en encadrant l'intérieur

*Réponse :* $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$

**21** La comparaison somme-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{k^\alpha}$$

permet tous calculs faits de montrer que

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \le S_n \le 1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

*Réponse :* $S_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

**22** **1.** On écrit $\ln n! = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$ puis on effectue une comparaison somme-intégrale en partant de

$$\ln k+1 \le \int_k^{k+1} \ln t\,\mathrm{d}t \le \ln k$$

Tous calculs faits on obtient

$$n\ln n - n + 1 \le \ln n! \le (n+1)\ln(n+1) - n$$

Il suffit de montrer que les deux quantités obtenues dans l'encadrement sont équivalentes à $n\ln n$.

**2.** Traduire l'équivalent : $\quad n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$
en : $\quad n! \underset{n\to+\infty}{=} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\big(1+o(1)\big)\quad$ puis passer au logarithme.

**23** La comparaison somme-intégrale, qui s'appuie sur la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ sur $[2,+\infty[$ pour écrire

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{k\ln k}$$

permet tous calculs faits de montrer que

$$\ln(\ln n+1) - \ln(\ln 2) \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \le \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}$$

Il suffit de montrer que les deux quantités obtenues dans l'encadrement sont équivalentes à $\ln(\ln n)$.

**24** **1. a)** Deux possibilités :

- Procéder par intégration par parties en primitivant $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t-k+1$.
- Appliquer la formule de Taylor à reste intégral à l'ordre 1 à une primitive $F$ de $f$ sur $[k, k+1]$.

**b)** Sommer l'égalité du **1a)** pour $k \in [\![1, n]\!]$.

**2.** Appliquer le résultat de **1b)** à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{i\alpha\ln t}}{t}$

et calculer les intégrales $\displaystyle\int_1^{n+1} f\quad$ et $\quad\displaystyle\int_1^{n+1} |f'|$

**25** **1. a)** Il n'est pas utile de calculer l'intégrale, la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ permet d'écrire

$$\frac{1}{n} \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n-1}$$

**b)** Utiliser le théorème de la limite monotone :

- La positivité des $a_k$ donne la croissance de $(A_n)$
- La majoration de a) permet de majorer $A_n$.

**2.** En écrivant $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - a_k$ pour $k \ge 2$ puis en sommant (et en utilisant Chasles), on obtient

$$H_n = \ln n + 1 - A_n$$

La suite $(1-A_n)$ est convergente, en notant $\gamma$ sa limite, on obtient le résultat demandé.

**26** **1.** Suivre la méthode du SF 14. Pour $n \ge 2$, considérer

$$A_n = \int_1^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\Bigg(\int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{\ln k}{k}\Bigg)}_{a_k}$$

- La décroissance de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $[e, +\infty[$ permet d'écrire, pour tout $k \ge 4$ : $0 \le a_k \le \dfrac{\ln(k-1)}{k-1} - \dfrac{\ln k}{k}$
- L'encadrement précédent permet de montrer que $(A_n)$ est croissante (à partir du rang 3) et majorée, donc convergente.

Sachant que : $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} - A_n$

le résultat demandé s'obtient en posant $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-A_n)$.

**2.** Séparer les termes d'indices pairs $k = 2p$ et impairs $k = 2p+1$ :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$$

De même

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p}$$

Ce qui donne
$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=2\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$$
Dans le premier terme du membre de droite, écrire ensuite $\ln(2p)=\ln 2+\ln p$ puis séparer la somme et simplifier les termes en commun avec le dernier terme.

**3.** Avec la question **2.** :
$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=\ln 2\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}_{H_n}-\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}}_{S_{2n}-S_n}$$
Il suffit d'utiliser :

- le fait que $H_n=\ln n+\gamma+o(1)$
- le résultat $S_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{(\ln n)^2}{2}+\ell+o(1)$ (avec $n$ et $2n$) .

Ce qui précède assure la convergence de la sous-suite $\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}\right)$ des termes d'indice pairs vers la limite voulue. Reste ensuite à montrer que la sous-suite des termes d'indices impairs converge vers cette même limite.

**27** **1.** Utiliser $H_{4n+4}=\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{1}{k}$ pour réexprimer
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}$$
Pour cela, séparer $H_{4n+4}$ en quatre paquets selon que les indices soient de la forme $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ ou $4k+4$ :
$$H_{4n+4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+3}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+4}$$
La somme de l'énoncé s'écrit alors :
$$S_n=H_{4n+4}-4\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+2}=H_{4n+4}-2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$$
En séparant de même les termes d'indices pairs et impairs dans $H_{2n+1}$ on obtient finalement :
$$S_n=H_{4n+4}-2H_{2n+1}+H_n$$
Conclure en utilisant $H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$

**2.** Mettre $S_n$ sous forme intégrale en remplaçant les quatre fractions par des intégrales *via* $\dfrac{1}{\alpha+1}=\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\,dt$.

La somme qui apparaît se calcule en faisant apparaître une somme géométrique.

On obtient finalement, après factorisation et simplification du facteur commun $(1-t)$ :
$$S_n=\int_0^1\frac{t^2+2t-1}{(1+t)(1+t^2)}(t^{4n+4}-1)\,dt$$
On conclut de façon usuelle en séparant la partie qui dépend de $n$ :
$$S_n=-\underbrace{\int_0^1\frac{t^2+2t-1}{(1+t)(1+t^2)}\,dt}_{I}+\underbrace{\int_0^1\frac{t^2+2t-1}{(1+t)(1+t^2)}\times t^{4n+4}\,dt}_{K_n}$$
puis :

- On calcule $I$ à l'aide d'une D.E.S : on trouve $I=0$
- On montre que $K_n$ tend vers 0 en encadrant l'intérieur

**28** **1.** A $n$ fixé, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone à $f_n : x\mapsto x^n+x$ sur $]1,2]$.

**2.** La suite $(x_n)$ est décroissante. Pour cela, calculer $f_{n+1}(x_n)$ et montrer : $f_{n+1}(x_n)\geq 0=f_{n+1}(x_{n+1})$.

La suite $(x_n)$ converge donc vers $\ell\geq 1$. Montrer que $\ell=1$ en prenant la limite dans la relation $x_n^n+x_n=3$.

**3. a)** En passant la relation $x_n^n+x_n=3$ au logarithme puis en utilisant $x_n=1+\delta_n$ on obtient : $n\ln(1+\delta_n)=\ln(2-\delta_n)$.

Il reste à remplacer chaque membre de l'égalité par un équivalent.

**b)** Il s'agit de montrer que : $\delta_n-\dfrac{\ln 2}{n}\sim\dfrac{\ln 2(\ln 2-1)}{2n^2}$.

En repartant de l'égalité $\ln(1+\delta_n)=\dfrac{1}{n}\ln(2-\delta_n)$ et en développant chaque terme jusqu'à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ :

- $\ln(1+\delta_n)=\delta_n-\dfrac{(\ln 2)^2}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- $\dfrac{1}{n}\ln(2-\delta_n)=\dfrac{\ln 2}{n}-\dfrac{\ln 2}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Reste à égaler les deux expressions ci-dessus.

**29** **1.** A $n$ fixé, appliquer le TVI strictement monotone à la fonction $f : x\mapsto\tan x-\dfrac{c}{x}$ sur $]n\pi,n\pi+\dfrac{\pi}{2}[$.

**2.** Utiliser l'encadrement : $n\pi\leq x_n\leq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

*Réponse :* $x_n\sim n\pi$.

**3. a)** $\delta_n\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ donc $\delta_n=\operatorname{Arctan}(\tan\delta_n)$.

Remplacer alors $\tan\delta_n$ en utilisant $\delta_n=x_n-n\pi$ puis $\tan x_n=\dfrac{c}{x_n}$ et enfin $\operatorname{Arctan}u\underset{u\to 0}{\sim}u$ combiné avec l'équivalent de $x_n$ trouvé.

**b)** Repartir de $\delta_n=\operatorname{Arctan}\dfrac{c}{x_n}=\operatorname{Arctan}\dfrac{c}{n\pi+\delta_n}$ et développer $\operatorname{Arctan}\dfrac{c}{n\pi+\delta_n}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ :

- Sachant que $\delta_n\sim\dfrac{c}{n\pi}$ commencer par montrer que $\underbrace{\dfrac{c}{n\pi+\delta_n}}_{v_n}=\dfrac{c}{n\pi}-\dfrac{c^2}{(n\pi)^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
- Utiliser ensuite $\operatorname{Arctan}v_n=v_n-\dfrac{1}{3}v_n^3+o(v_n^3)$.

**30** **1.** Pour $n\geq 1$ fixé, appliquer le TVI strictement monotone à $f : x\mapsto x^{2n}-2nx+1$ sur $]1,+\infty[$.

**2.** Pour montrer que $P_n\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq 0$, minorer $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}$ en ne gardant que les trois premiers termes dans la formule du binôme.

Comparer ensuite $1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $x_n$ ($P_n$ est croissante sur $[1,+\infty[$) et conclure par encadrement.

**3. a)** En passant l'égalité $x_n^{2n}=2nx_n-1$ au logarithme on obtient $\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{\ln n}{2n}+\dfrac{\ln 2}{2n}+\dfrac{1}{2n}\ln\left(x_n-\dfrac{1}{2n}\right)$ :

- Dans le membre de gauche $\ln(1+\varepsilon_n)\sim\varepsilon_n$
- Dans le membre de droite, l'équivalent est le « plus gros » des trois termes (montrer que les deux autres sont des $o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

**b)** Repartir de $\ln(1+\varepsilon_n)=\dfrac{\ln n}{2n}+\dfrac{\ln 2}{2n}+\underbrace{\dfrac{1}{2n}\ln\left(x_n-\dfrac{1}{2n}\right)}_{=o(\frac{1}{n})}$ et développer le membre de gauche jusqu'à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (faire un $DL_2$ de $\ln(1+\varepsilon_n)$).

**31** **1.** A $n$ fixé, l'équation $e^x = x^n$ équivaut pour $x \neq 1$ à $\frac{x}{\ln x} = n$. Etudier alors les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

**2. a)** La relation $f(x_n) = n$ permet d'écrire $x_n = g(n)$ où $g$ est la réciproque de la fonction $f_{|]1,e[}$.
La monotonie et la limite de $(x_n)$ découle des variations de $g$ qui est décroissante et vérifie $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 1$ (d'après le théorème de continuité des fonctions réciproques et le TVI strictement monotone)

**b)** Il s'agit de trouver un équivalent de $\varepsilon_n = x_n - 1$.
L'égalité $\ln(x_n) = \frac{x_n}{n}$ permet d'écrire $\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{x_n}{n}$.
Remplacer alors chaque membre par un équivalent.
*Réponse :* $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n}$.

**c)** Il s'agit de montrer : $\varepsilon_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
En repartant de l'égalité $\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{1}{n}(1+\varepsilon_n)$ et en développant chaque membre jusqu'à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

- $\ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{n}(1+\varepsilon_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Reste à égaler les deux expressions ci-dessus.

**3. a)** Utiliser $y_n = h(n)$ où $h$ est la réciproque de la fonction $f_{|]e,+\infty[}$ et procéder comme en **2a)**.
*Réponse :* $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

**b)** Passer l'égalité $e^{y_n} = y_n^n$ au logarithme : $y_n = n \ln y_n$.
Reste à montrer que $\ln y_n \sim \ln n$.
Pour cela, passer à nouveau au logarithme :
$$(\star) \quad \ln y_n = \ln n + \ln(\ln y_n)$$
et montrer que $\ln(\ln y_n) = o\big(\ln y_n\big)$.

**c)** Repartir de l'égalité $y_n = n \ln y_n \underset{\star}{=} n \ln n + n \ln(\ln y_n)$.
Il reste à montrer que $\ln(\ln y_n) \sim \ln(n \ln n)$ c'est à dire que l'équivalent de **3b)** $\ln(y_n) \sim n \ln n$ « passe au logarithme » (montrer par exemple que le quotient tend vers 1).

**32** **1.** A $\alpha > 0$ fixé, appliquer le TVI strictement monotone à $f_\alpha : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} - x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**2.** Etant donnés $\alpha < \beta$, il s'agit de comparer $x_\alpha$ et $x_\beta$. Pour cela calculer $f_\beta(x_\alpha)$ et montrer que $f_\beta(x_\alpha) < 0 = f_\beta(x_\beta)$ puis utiliser la décroissance de $f_\beta$.
La décroissance de $\alpha \mapsto x_\alpha$ et le fait que les $x_\alpha$ sont tous supérieurs à 1 assure l'existence de $\ell = \lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha$ et $\ell \geq 1$.
Montrer que $\ell = 1$ en faisant tendre $\alpha$ vers $+\infty$ dans l'égalité $e^{1/x_\alpha} = x_\alpha^\alpha$.

**3.** Posant $\delta_\alpha = x_\alpha - 1$ il s'agit de montrer que $\delta_\alpha \underset{\alpha\to+\infty}{=} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
Commencer par prendre le logarithme de l'égalité vérifiée par $x_\alpha$ pour obtenir :
$$(\star) \ln(1+\delta_\alpha) = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{1+\delta_\alpha}$$
Puis :

- Montrer d'abord que $\delta_\alpha \sim \frac{1}{\alpha}$ en considérant des équivalents dans $(\star)$
- Développer ensuite chaque membre de $(\star)$ à la précision $o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$.