Sommes de Riemann

1 SF 10 Etudier les limites des suites de termes généraux :

a) $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ **b)** $w_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$ **c)** $t_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$

2 SF 10 SF 14 Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$:

a) En utilisant une somme de Riemann

b) Par comparaison somme-intégrale

3 SF 10 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Montrer : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 fg$

4 Soit $r \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Calculer : $I = \int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ à l'aide de sommes de Riemann

Indication : Utiliser la factorisation de $X^{2n}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

5 SF 10 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$, il existe un unique $x_{n,k} \in [a,b]$ tel que : $\int_a^{x_{n,k}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_{n,k}$.

Montrer que : $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$.

6 SF 10 **a)** Etudier la limite de $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}$

b) En déduire : $\sum_{k=1}^{n} k\ln k = \frac{n^2\ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + o(n^2)$.

7 SF 10 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et convexe sur $[a,b]$ $(a<b)$. En utilisant l'inégalité de Jensen, démontrer que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

8 SF 10

1. a) Soient $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}$. Etablir :

$$n\sum_{j=1}^{n} u_j v_j - \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (u_j-u_i)(v_j-v_i)$$

b) En déduire que si $u_1 \leq \cdots \leq u_n$ et $v_1 \leq \cdots \leq v_n$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

2. Soient $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continues par morceaux et croissantes. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Formules de Taylor globales

9 SF 12 Montrer : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

10 En appliquant une formule de Taylor à $f : x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

11 SF 11 **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $|\sin x - x| \leq \frac{x^3}{6}$

b) Etudier la limite de : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$

12 SF 11 **a)** Montrer : $\forall x \in [0,1],\quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2 e}{2}$

b) Etudier la limite de : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n$

13 SF 12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f^{(n)}(x) \geq \alpha$.

Montrer : $\frac{f(x)}{x^{n-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

14 SF 11 **a)** Etablir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \left|\sin\left(\frac{1}{n}\sin t\right) - \frac{1}{n}\sin t\right| \leq \frac{1}{6n^3}$$

b) Etudier la limite de $u_n = n\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{n}\sin t\right)\mathrm{d}t$

15 SF 11 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour certains $M_0, M_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x)| \leq M_0 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M_2$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer : $\forall h > 0,\quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\quad |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

16 SF 11 Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, non nulle. On suppose qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(a) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $M_n = \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(n)}(t)\right|$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{M_k}$.

Montrer que (S_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \frac{e}{M_0}$.

La ruse de l'intégrale de t^k

17 SF 13 Etudier la limite de : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

18 SF 13 Soit $x \in [0,1]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \int_0^x \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de S_n.

19 SF 13

a) Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$

b) En déduire : $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+3k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

20 SF 13 Etudier la limite de : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9k^2-1}$.

Comparaisons somme-intégrale

21 SF 14 Soit $\alpha\in]0,1[$. A l'aide d'une comparaison somme-intégrale, déterminer un équivalent de $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

22 SF 14

1. Par comparaison somme-intégrale, établir : $\ln(n!)\sim n\ln n$
2. A partir de la formule de Stirling, montrer qu'en fait : $\ln(n!)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln n-n+\frac{\ln n}{2}+\frac{\ln(2\pi)}{2}+o(1)$.

23 SF 14 En effectuant une comparaison somme-intégrale montrer : $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)$.

24

1. Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.
   a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:
   $$\int_k^{k+1}f(t)\,\mathrm{d}t=f(k)+\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$
   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
   $$\left|\sum_{k=1}^{n}f(k)\right|\leq\left|\int_1^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\int_1^{n+1}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$$
2. Soit $\alpha>0$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\alpha\ln k}}{k}\right)_{n\geq1}$ est bornée

Somme harmonique et constante d'Euler

25 SF 15 *La constante d'Euler*

1. Pour $n\geq2$, on pose : $a_n=\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}-\frac{1}{n}$ et $A_n=\sum_{k=2}^{n}a_k$
   a) En encadrant l'intégrale, montrer :
   $$\forall k\geq2,\quad 0\leq a_k\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$
   b) Montrer que (A_n) est convergente.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   Etablir l'existence d'un réel γ tel que :
   $$H_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$$

26 SF 15

1. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que :
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{(\ln n)^2}{2}+\ell+o(1)$$
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=\ln2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\ln k}{k}$$
3. En déduire : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma\ln2-\frac{(\ln2)^2}{2}$
   (où γ désigne la constante d'Euler).

27 SF 15 SF 13 Démontrer que
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

1. En utilisant le développement $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+\gamma+o(1)$.
2. En faisant apparaître une intégrale.

Des suites implicites

28

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x^n+x=3$ possède une unique solution dans $]1,2]$, notée x_n.
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. On pose $\delta_n=x_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :
   a) $\delta_n\sim\frac{\ln2}{n}$ b) $x_n=1+\frac{\ln2}{n}+\frac{\ln2(\ln2-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

29 Soit $c\in\mathbb{R}_+^*$, fixé.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x\sin x=c\cos x$ d'inconnue $x\in]n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2}[$ possède une unique solution notée x_n.
2. Déterminer un équivalent simple de x_n
3. Pour tout $n\geq1$, on pose $\delta_n=x_n-n\pi$.
   a) Exprimer δ_n à l'aide de la fonction arctangente pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et montrer que : $\delta_n\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{c}{n\pi}$.
   b) Etablir enfin : $x_n\underset{n\to+\infty}{=}n\pi+\frac{c}{n\pi}-\frac{c^2(3+c)}{3n^3\pi^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

30 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $P_n=X^{2n}-2nX+1$.

1. Montrer que pour tout $n\geq1$, le polynôme P_n possède une unique racine sur $]1,+\infty[$, notée x_n.
2. Montrer que (x_n) converge vers 1. *Indication : Avec la formule du binôme montrer que pour $n\geq2$:* $P_n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})>0$.
3. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\varepsilon_n=x_n-1$.
   a) Etablir : $\varepsilon_n\sim\frac{\ln n}{2n}$
   b) Montrer enfin : $x_n\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{\ln n}{2n}+\frac{\ln2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

31

1. Montrer que pour tout $n\geq3$, l'équation $e^x=x^n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$ possède exactement deux solutions $x_n<y_n$.
2. a) Etudier la monotonie de (x_n) et montrer que $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$
   b) Déterminer un équivalent simple de x_n-1.
   c) Etablir enfin : $x_n\underset{n\to+\infty}{=}1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3. a) Etudier la limite de (y_n)
   b) Montrer que $y_n\sim n\ln n$.
   c) Etablir enfin : $y_n\underset{n\to+\infty}{=}n\ln n+n\ln(\ln n)+o\big(n\ln(\ln n)\big)$

32

1. Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, l'équation $e^{\frac{1}{x}}=x^\alpha$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$ admet une unique solution x_α.
2. Etudier la monotonie de $\alpha\mapsto x_\alpha$ sur $]0,+\infty[$ et en déduire la valeur de $\lim_{\alpha\to+\infty}x_\alpha$
3. Montrer enfin $x_\alpha\underset{\alpha\to+\infty}{=}1+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha^2}+o\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.