• **Cadre.** • On considère une fonction $\varphi : I \to \mathbb{C}$ • Pour tout $t \in I$ on note $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ où $u(t), v(t) \in \mathbb{R}$

1 Ce qui ne change pas

- La définition de la limite, il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules.
- Les définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point par exemple φ est dérivable en a ssi $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$.
- Les résultats sur les opérations algébriques (y compris pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$)

2 Lien avec les parties réelle et imaginaire

On dispose de l'équivalence, pour $\ell \in \mathbb{C}$: $$\varphi(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} u(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \operatorname{Re}\ell \\ v(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \operatorname{Im}\ell \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

- φ est continue en a ssi u et v sont continues en a
- φ est dérivable en a ssi les fonctions u et v le sont, en ce cas, on a $\varphi'(a) = u'(a) + iv'(a)$.

On en déduit que :

Théorème 1

Si φ est dérivable sur I et si $\varphi' = 0$ sur I, alors φ est constante sur I.

3 Ce que l'on perd : les grands théorèmes, sauf l'inégalité des accroissements finis

Pour les limites

Tous les résultats liés à l'ordre (théorèmes de comparaison, théorème de la limite monotone).

Pour la continuité

Les trois grands théorèmes de continuité sur un intervalle à savoir :

Faux

- le théorème des valeurs intermédiaires (et son corollaire strictement monotone) ;
- Le théorème des bornes atteintes ;
- Le théorème de continuité de la fonction réciproque ;

sont faux pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour la dérivabilité

Faux

- Le théorème de Rolle ;
- l'égalité des accroissements finis ;

sont faux pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1 *Contre-exemple au théorème de Rolle* — On considère la fonction $f : t \mapsto e^{it}$ définie sur $[0, 2\pi]$.
La fonction f satisfait aux trois hypothèses du théorème de Rolle mais ne vérifie pas sa conclusion.

• Néanmoins, l'inégalité des accroissements finis est toujours vraie pour les fonctions à valeurs complexes.

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel k tel que $|f'| \leq k$ sur I.
Alors la fonction f est k-lipschitzienne sur I.