III Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

1 Définition

- **Notation.** On définit par récurrence les *dérivées successives* de f

• Pour $n = 0$: • Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si :

• •

- **Remarques:**

1. • f est de classe $\mathscr{C}^0$ signifie : • f est de classe $\mathscr{C}^1$ signifie :

2. Si f est deux fois dérivable sur I :

3. f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si :

Exercice 1 ♥ *Dérivées successives classiques* — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression des dérivées k-ième de
a) $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé) **b)** sh et ch **c)** sin et cos **d)** $f : x \mapsto x^p$ (où $p \in \mathbb{N}$ est fixé)

Exercice 2 SF 2 ♥ — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée k-ième de $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

- **Cadre.** n est un entier naturel.

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathscr{C}^n$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :* $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.* fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :
- *Quotient.* Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

SF 2 : utiliser la formule de Leibniz

♥ **Exercice 3** *Ex. 3, banque INP* — **1.** Démontrer la formule de Leibniz.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on pose $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ l'expression de $f^{(n)}(x)$

Théorème 2 : Composition version $\mathscr{C}^n$

Si : *i)* v est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J *ii)* u est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, à valeurs dans J alors $v \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I

Théorème 3 : Réciproque version $\mathscr{C}^n$

Si : *i)* f est bijective de I sur J *ii)* f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I *iii)*

alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

Exemple 1 SF 3 SF 4 —
1. Justifier que $f : x \mapsto xe^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$
2. Justifier que f est une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}, +\infty[$ et que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{e}, +\infty[$

3 Variante $\mathscr{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

Exemple 2 — **1.** Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.