I Factorisation irréductible

1 Polynômes irréductibles

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :

Exemple 1 — **a)** $P = X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$. **b)** $P = 2X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple 2 — **1.** Montrer que tout polynôme de degré 1 est irréductible.
2. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 à discriminant strictement négatif est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

• **Remarque.** Les polynômes irréductibles sont les analogues dans $\mathbb{K}[X]$ des nombre premiers dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 1 : Lemme d'euclide

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$:

2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 2 : d'Alembert-Gauss (Rappel)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe.
En conséquence tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1 ♥ — Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, non tous deux nuls. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines (comptées avec multiplicité)

Exemple 3 — Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes : **a)** $P = X^4 + 1$. **b)** ♥ $Q = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ (où $n \geq 2$).

Exercice 2 — Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité.

Exemple 4 — **a)** Montrer que j est racine de $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ **b)** Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

-
-

SF 7 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

1. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ 2. On regroupe les facteurs conjugués en utilisant : $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) =$

Exemple 5 — Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$: **a)** $P = X^4 + 1$ **b)** $P = X^5 - 1$ **c)** $P = X^{2n+1} - 1$

Exemple 6 *cf. Ex. 85.2, banque INP* — Factoriser $P = X^5 - 4X^2 + 3X$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que 1 est racine double.

4 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 4

i) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
ii) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
• les polynômes de degré 1 • les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème 5

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$; l'écriture est unique à l'ordre près des facteurs

• **Remarque.** Comme dans $\mathbb{Z}$, on peut utiliser la décomposition en facteurs irréductibles :
• Pour trouver les diviseurs d'un polynôme • Pour calculer un PGCD • Pour calculer un PPCM

Exemple 7 — Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A = 2X(X+1)^2(X+2)^3$ et $B = X^2(X+2)(X^2+X+1)$. Calculer $A \wedge B$.