3 Approfondissement : une définition de l'exponentielle

- **Objectif.** Donner une définition rigoureuse des fonctions sinus et cosinus.
- **Point de départ.** On a vu que :
  - Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.
  - Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $(\star)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$

Définition 1

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $\displaystyle e^z \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

- **Remarques:**
  - La relation $(\star)$ se réecrit : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$.
  - La définition de l'exponentielle assure que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
  - En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$.

Exercice 1 — Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{e^{tz}-1}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} z$

Définition 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\cos x \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Re}(e^{ix}) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Im}(e^{ix}) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

- **Remarques:**
  - L'identification des parties réelles et imaginaires dans la formule $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ établit les formules d'addition : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
  - La relation $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ fournit la parité de la fonction cosinus et l'imparité de la fonction sinus.
  - Sachant que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, l'égalité : $\left|e^{ix}\right|^2 = 1$ s'écrit : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Exercice 2 — Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\varphi : t \mapsto e^{tz}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(t) = z\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 1

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\cos' = -\sin$ $\sin' = \cos$.

Correction des exercices et preuve du théorème

Exercice 1 — Montrons que : $\dfrac{e^{tz}-1}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} z$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{e^{tz}-1}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\frac{z^n}{n!} = z + t\sum_{n=2}^{+\infty} t^{n-2}\frac{z^n}{n!}$$

Si $|t| \leq 1$:

$$\left|\frac{e^{tz}-1}{t} - z\right| \underset{\text{I.T.}}{\leq} |t|\sum_{n=2}^{+\infty} |t|^{n-2}\left|\frac{z^n}{n!}\right| \underset{|t|\leq 1}{\leq} |t| \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{n!}\right|}_{C}$$

où C est un réel [1] indépendant de t.

Par encadrement : $\left|\dfrac{e^{tz}-1}{t} - z\right| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2 — Soit $t \in \mathbb{R}$.

Montrons que : $\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} z\varphi(t)$.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \frac{e^{tz+hz}-e^{tz}}{t} = e^{tz}\frac{e^{hz}-1}{h}$$

Avec le résultat de l'exercice précédent :

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \varphi(z)\frac{e^{hz}-1}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \varphi(z) \times z$$

Démonstration du théorème 1

On applique le résultat précédent avec $z = i$: la fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\varphi'(t) = ie^{it} = -\sin t + i\cos t$.

En conséquence :

- la fonction $\cos = \mathrm{Re}(\varphi)$ est dérivable, de dérivée $t \mapsto -\sin t$
- la fonction $\sin = \mathrm{Im}(\varphi)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto \cos t$.

1. Par convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n!}$