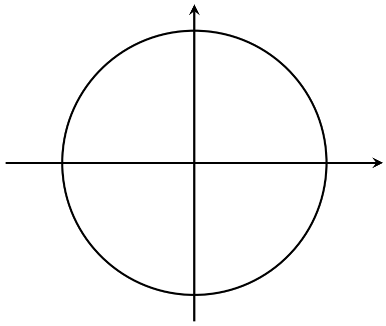
II Exponentielle imaginaire

1 Complexes de modules 1

- **Notation.** On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U} =$

- **A retenir.** Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $z \in \mathbb{U}$ ssi :



Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=}$

Exemple 1 — $e^{\frac{2i\pi}{3}} =$

- **Valeurs à connaître.** • $e^{i0} = e^{2i\pi} =$ • $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ • $e^{i\pi} =$ • $e^{-i\frac{\pi}{2}} =$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:
2. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
4. Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

Exercice 1 — Démontrer les points 3 et 4.

SF 4 : Exploiter le fait que z est de module 1

Exemple 2 — Trouver tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

Exercice 2 — Démontrer la formule de Moivre et les formules d'Euler.

Théorème 3 : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. • •

Exercice 3 ♥ — Démontrer ces deux formules en « factorisant par l'angle moitié ».

SF 5 : factoriser par l'angle moitié

♥ **Exemple 3** — En factorisant $e^{ip} + e^{iq}$ par l'angle moitié, retrouver la formule de factorisation de $\cos p + \cos q$.

3 Applications à la trigonométrie

Euler et linéarisation ♥

- **Objectif.** *Linéariser* une expression de la forme $\cos^p x \sin^q x$ *i.e.* l'exprimer à l'aide de $\cos x, \cos 2x, \cos 3x \dots$, et $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$ (sans puissances ni produits). Par exemple : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

SF 6 : Utiliser Euler pour linéariser

Exemple 4 — Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser : **a)** $\sin^5 x$. **b)** $\cos^4 x \sin x$

Moivre et « délinéarisation » ♥

- **Objectif.** Effectuer la transformation inverse *i.e.* écrire $\cos nx$ (ou $\sin nx$) comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$

SF 7 : Utiliser Moivre pour « délinéariser »

Exemple 5 — Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Calcul de sommes trigonométriques ♥

SF 8 : Calculer des sommes trigonométriques

♥ **Exemple 6** — Soient $x \in \mathbb{R}$. et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.