III Existence et/ou calcul de limites

1 Opérations sur les limites

- **Cadre.** • u, v sont des suites réelles • ℓ, ℓ' sont des réels. • On suppose que u et v ont des limites.

• Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

• Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

signe $\pm$ donné par la règle des signes

• Limite de l'inverse d'une suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

- **Remarque.** F.I. signifie forme indéterminée.

Exemple 0 — Limite de $\left(\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$?

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.Si : *i)* *ii)*

Alors :

**Exemple 1 Attention — ** Prouver que l'implication : $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < v_n) \implies (\ell_1 < \ell_2)$ est fausse

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si : *i)* *ii)*

Alors :

- **Remarque.** C'est un théorème « deux en un » qui fournit : 1. L'existence de $\lim v_n$ 2. La valeur de $\lim v_n$.

Théorème 3 : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

-
-

Exemple 2 *SF 7* — Etudier la limite de la suite de terme général : **a)** $u_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ $(x \in \mathbb{R})$ **b)** $u_n = q^n$ où $q > 1$

SF 3 : Majorer/minorer une somme

Exemple 3 — Etudier la convergence et la limite de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$.

4 Suites monotones

Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite. Plus précisément :

-
-

- **Attention** . Eviter l'inusable :

- **Remarque.** On dispose du théorème analogue pour les suites décroissantes, minorées ou non minorées.

Exemple 4 *SF 6* ♥ — On pose $u_0 = 1$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $u_n \to +\infty$.

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si : *i)* *ii)*

Théorème 5

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors :

Exercice 1 ♥ — Démontrer le théorème

Exemple 5 *SF 8* — Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,n!}$. Montrer que u et v ont même limite