II Espérance et variance d'une variable aléatoire

• **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini • X et Y sont des variables aléatoires *complexes* sur Ω

1 Espérance

Définition 1

L'espérance de X est le nombre complexe :

• **Vocabulaire.** X est dite *centrée* si $E(X) = 0$.

Exemple 1 — Si X est constante de valeur a :

Exemple 2 *SF 2* — Calculer $E(X)$ dans le cas des n lancers de pièce où X est le n° du 1er lancer qui donne pile.

Exemple 3 — On suppose que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Montrer que pour tout $m \in [\![1, n]\!]$: $E(X) \leq m - 1 + nP(X \geq m)$.

Exercice 1 *Une autre expression de l'espérance* — Montrer que : $\boxed{E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})}$

Théorème 1 : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité*. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$
2. *Inégalité triangulaire*.
3. Si X et Y sont réelles.
   • *Positivité*. • *Croissance*.

Exercice 2 — Démontrer le point 1 (linéarité).

Attention Pour le produit, en général :

Exemple 4 *SF 2* — On lance deux fois un dé équilibré. En moyenne, combien vaut la somme des deux résultats ?

Théorème 2 : Formule de transfert

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose que X est à valeurs dans I. Alors :

Exercice 3 — Démontrer cette formule.

Exemple 5 *SF 2* — On lance un dé équilibré, on note X le résultat obtenu. Calculer : $E(X^2)$ et $E(e^X)$.

Exemple 6 *SF 2* — Soit I un intervalle, $f \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R})$, concave et X une variable aléatoire à valeurs dans I
a) Montrer que $E(X) \in I$ **b)** Montrer que : $E\big(f(X)\big) \leq f\big(E(X)\big)$

2 Variance

Ici X est une variable aléatoire *réelle*.

Définition 2

• La variance de X est le réel positif : • L'écart-type de X est : .

Théorème 3 : Propriétés de la variance

1. *Formule de Koenig-Huygens*.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

Attention En général :

• **Vocabulaire.** Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espérance $E(X^k)$ est appelée le moment d'ordre k de X.

Exercice 4 — Démontrer les deux relations du théorème.

Exemple 7 — On suppose que : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $P(X = k) = \lambda k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
a) Calculer λ **b)** Calculer $E(X)$ **c)** Calculer $V(X)$ *On pourra utiliser la formule :* $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exemple 8 — Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) = 0$. Montrer que : $E\big(|X|\big) \leq \sqrt{V(X)}$.

Exercice 5 — On suppose que $V(X) \neq 0$ et on note $\boxed{Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}}$. Montrer que : $\boxed{E(Y) = 0 \quad \text{et} \quad V(Y) = 1}$.