II Equivalence

1 Définition

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si :

- **Cas des suites .** Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $v_n \neq 0$ APCR, on dit que u est équivalent à v si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff$$

Exercice 1 — Démontrer le théorème précédent.

SF 1 : Trouver un équivalent d'une somme = ne garder que le « plus gros » terme

Exemple 1 — $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim}$ $\quad x^2 + x \underset{x\to 0}{\sim}$ $\quad e^{4x} - x^{20} + (\ln(x))^{83} \underset{x\to+\infty}{\sim}$ $\quad n + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

- **Remarque.** Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$ où $d < n$ et a_d et a_n sont non nuls :

• En $\pm\infty$: • En 0 :

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors :

Exercice 2 — On suppose que $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ alors :

Théorème 4 : Equivalent par encadrement

Si : *i)* *ii)* Alors :

2 Règles de calcul

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors :
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors :
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors :
4. *Puissances d'exposant* $\boxed{\textit{constant}}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
5. *Equivalence avec une constante.* Pour $\ell \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \iff$
6. *Changement de variable.* Si : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$, alors : .
7. *Substitution* . Si : $f = o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors :

Exemple 2 — On admet que : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ et $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Que dire de : **a)** $e^{\sin x}$? **b)** e^{e^x} ?

☢ Propriétés FAUSSES ☢

1. *Somme.* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$
2. *Composition.* $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $\phi \circ f \underset{a}{\sim} \phi \circ g$ en particulier : $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $e^f \underset{a}{\sim} e^g$
3. *Puissances d'exposant non constant.* Eviter le célèbre : $1 + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ ~~donc~~ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} 1^x = 1$.

Exercice 3 — Donner un contre-exemple pour 1 et 2 et prouver que 3 est fausse.

SF 5 : Lever une forme indéterminée « quotient » :

Exemple 3 — Calculer : **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x^2+1}{x^5+x^2+2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{e^{1/x}}{x^2}}-1}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$