II Equations du second ordre à coefficients constants

- **Cadre.** On étudie l'équation différentielle : $(E)\qquad y''+ay'+by=s(t)$

où : • $a,b\in\mathbb{K}$ sont des constantes • s est une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$

- **Remarque.** On dispose de résultats analogues à ceux sur le premier ordre :
  - Un théorème de structure assurant que si y_1 une solution particulière de (E), alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme y_1+y_0 où y_0 est une solution quelconque de (E_0).
  - Un principe de superposition des solutions.
  - Un théorème sur les conditions initiales assurant qu'étant donnés $t_0\in I$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, il existe une unique solution du problème de Cauchy : $y''+ay'+by=s(t)$ avec $y(t_0)=\alpha$ et $y'(t_0)=\beta$

1 Equation caractéristique

Exercice 1 — Pour quels $\lambda\in\mathbb{K}$ la fonction $y:t\mapsto e^{\lambda t}$ est-elle solution de l'équation homogène $y''+ay'+by=0$?

2 Résolution de l'équation homogène

- **Cadre.** • On cherche à résoudre (E_0) : $y''+ay'+by=0$ • L'équation caractéristique associée est $(\mathscr{C}) : \lambda^2+a\lambda+b=0$

Exercice 2 — On note λ_1,λ_2 les racines complexes de $(\mathscr{C})$. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ deux fois dérivable.
Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si $z:t\mapsto y(t)e^{-\lambda_1 t}$ est solution de $z''+(\lambda_1-\lambda_2)z'=0$.

Théorème 1 : Solutions de (E_0)

• **Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$**

Discriminant Δ de $(\mathscr{C})$	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta\neq 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta=0$	λ_0	

• **Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$**

Discriminant Δ de $(\mathscr{C})$	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta>0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta=0$	λ_0	
$\Delta<0$	$\alpha\pm i\beta$	

Exercice 3 — Démontrer le théorème dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Exemple 1 SF 2 — Résoudre sur $\mathbb{R}$ **a)** $y''+4y'-5y=0$ **b)** $y''-2y'+y=0$ **c)** $y''+2y'+2y=0$ **d)**♥ $y''+\omega^2y=0$

3 Equations avec second membre exponentiel

- **Cadre.** • On cherche à résoudre : (E) : $y''+ay'+by=Ke^{mt}$ • On note Δ le discriminant de : $(\mathscr{C})\ \lambda^2+a\lambda+b=0$

SF 3 : Trouver une solution particulière de $y''+ay'+b=Ke^{mt}$

1. On regarde si m est solution de l'équation caractéristique

2. On cherche une solution y_1 de la forme :

$(\mathscr{C})$ a deux racines $\lambda_1\neq\lambda_2$: $m=\lambda_1$ ou λ_2 ; $m\neq\lambda_1$ et λ_2

$(\mathscr{C})$ a une racine double λ_0 : $m\neq\lambda_0$; $m=\lambda_0$

Attention Ici la constante C est à trouver explicitement (en testant y_1 dans l'équation)

Exemple 2 — Résoudre les équations différentielles : **a)** $y''-y'-2y=e^t$. **b)** $y''-y'-2y=2\,\mathrm{ch}\,t$.

SF 4 : Trouver une solution particulière de $y''+ay'+by=K\cos\omega t$ ou $K\sin\omega t$ (avec K et ω réels)

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t)=$
2.

Exemple 3 — Résoudre l'équation différentielle : $y''-y'-2y=10\cos t$

Exemple 4 — Soient $\omega,\rho\in\mathbb{R}_+^*$. Résoudre : $y''+\omega^2y=\sin(\rho t)$. *On distinguera les cas $\rho\neq\omega$ et $\rho=\omega$.*

4 Application classique : une (autre) équation fonctionnelle

SF 5 : Equation fonctionnelle et équation différentielle (2)

♥ **Exemple 5** — Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(\pi-x)$