

## II Equations du second ordre à coefficients constants

## Equations différentielles

- Cadre.** On étudie l'équation différentielle :  $(E) \quad y'' + ay' + by = s(t)$   
où : •  $a, b \in \mathbb{K}$  sont des constantes •  $s$  est une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{K}$
- Remarque.** On dispose de résultats analogues à ceux sur le premier ordre :
  - Un théorème de structure assurant que si  $y_1$  une solution particulière de  $(E)$ , alors les solutions de  $(E)$  sont toutes les fonctions de la forme  $y_1 + y_0$  où  $y_0$  est une solution quelconque de  $(E_0)$ .
  - Un principe de superposition des solutions.
  - Un théorème sur les conditions initiales assurant qu'étant donnés  $t_0 \in I$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , il existe une unique solution du problème de Cauchy :  $y'' + ay' + by = s(t)$  avec  $y(t_0) = \alpha$  et  $y'(t_0) = \beta$

### 1 Equation caractéristique

**Exercice 1** — Pour quels  $\lambda \in \mathbb{K}$  la fonction  $y : t \mapsto e^{\lambda t}$  est-elle solution de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$  ?

### 2 Résolution de l'équation homogène

- Cadre.** • On cherche à résoudre  $(E_0)$  :  $y'' + ay' + by = 0$  • L'équation caractéristique associée est  $(\mathcal{C}) : \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

**Exercice 2** — On note  $\lambda_1, \lambda_2$  les racines complexes de  $(\mathcal{C})$ . Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fois dérivable.

Montrer que  $y$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si  $z : t \mapsto y(t)e^{-\lambda_1 t}$  est solution de  $z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$ .

#### Théorème 1 : Solutions de $(E_0)$

##### • Solutions de $(E_0)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant $\Delta$ de $(\mathcal{C})$	Racines de $(\mathcal{C})$	Les solutions de $(E_0)$ sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	$\lambda_1$ et $\lambda_2$	
$\Delta = 0$	$\lambda_0$	

##### • Solutions de $(E_0)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant $\Delta$ de $(\mathcal{C})$	Racines de $(\mathcal{C})$	Les solutions de $(E_0)$ sont les fonctions :
$\Delta > 0$	$\lambda_1$ et $\lambda_2$	
$\Delta = 0$	$\lambda_0$	
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	

**Exercice 3** — Démontrer le théorème dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Exemple 1 SF 2** — Résoudre sur  $\mathbb{R}$  a)  $y'' + 4y' - 5y = 0$  b)  $y'' - 2y' + y = 0$  c)  $y'' + 2y' + 2y = 0$  d)  $y'' + \omega^2 y = 0$

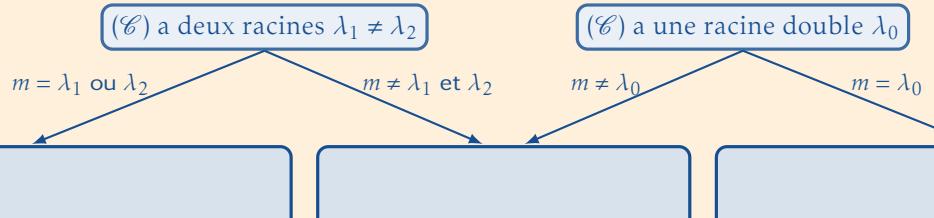
### 3 Equations avec second membre exponentiel

- Cadre.** • On cherche à résoudre :  $(E) : y'' + ay' + by = Ke^{mt}$  • On note  $\Delta$  le discriminant de :  $(\mathcal{C}) : \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

#### SF 3 : Trouver une solution particulière de $y'' + ay' + b = Ke^{mt}$

1. On regarde si  $m$  est solution de l'équation caractéristique

2. On cherche une solution  $y_1$  de la forme :



⚠️ Attention ⚠️ Ici la constante  $C$  est à trouver explicitement (en testant  $y_1$  dans l'équation)

**Exemple 2** — Résoudre les équations différentielles : a)  $y'' - y' - 2y = e^t$ . b)  $y'' - y' - 2y = 2\sinh t$ .

#### SF 4 : Trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = K \cos \omega t$ ou $K \sin \omega t$ (avec $K$ et $\omega$ réels)

- On cherche une solution particulière pour le second membre  $s(t) =$

**Exemple 3** — Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - y' - 2y = 10\cos t$

**Exemple 4** — Soient  $\omega, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ . Résoudre :  $y'' + \omega^2 y = \sin(\rho t)$ . On distingue les cas  $\rho \neq \omega$  et  $\rho = \omega$ .

### 4 Application classique : une (autre) équation fonctionnelle

#### SF 5 : Equation fonctionnelle et équation différentielle (2)

♥ **Exemple 5** — Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(\pi - x)$