I Equations du premier ordre

1 Généralités

• **Cadre.** On étudie les équations de la forme : (E) $\quad y' + a(t)y = b(t)$

où : • l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable. • a, b sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ fixées.

2 Résolution de l'équation homogène $(b = 0)$

• **Cadre.** • On cherche à résoudre (E_0) : $\quad y' + a(t)y = 0$ • On note A une primitive de a sur I.

Théorème 1

Les solutions de (E_0) sont les fonctions

Exercice 1 — Démontrer le théorème.

3 Equations avec second membre

• **Objectif.** • On cherche à résoudre (E) : $\quad y'+a(t)y = b(t)$ • On associe à (E) l'équation homogène (E_0) : $y'+a(t)y = 0$

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E).

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

Exercice 3 — Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$.

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

Etape 1 Résolution de l'équation homogène	Etape 2 Variation de la constante	Etape 3 Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme :	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme :	*Les* solutions de l'équation sont toutes les fonctions y de la forme :

Exemple 1 *SF 1* — **a)** Résoudre : $\quad y' + \frac{1}{t}y = t \quad$ sur $\mathbb{R}_+^*$. **b)** Résoudre : $\quad y' + y = \frac{1}{1+e^t} \quad$ sur $\mathbb{R}$.

• **Remarque.** A l'étape 2, la méthode de la variation de la constante est un moyen général pour trouver une solution particulière. Dans certains cas, on peut procéder autrement.

Exemple 2 *Solution évidente* — Trouver une solution particulière de $y' + ty = 2t$.

Exemple 3 *Cas où a et b sont des fonctions constantes* — Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Résoudre : $\quad y' + \alpha y = \beta \quad$ sur $\mathbb{R}$

Exemple 4 *Principe de superposition* — Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$, continues. On suppose que :
• y_1 est une solution de l'équation : $y' + a(t)y = b_1$. • y_2 est une solution de l'équation : $y' + a(t)y = b_2$.
Montrer que $y_1 + y_2$ est solution de : $y' + a(t)y(t) = b_1 + b_2$

Exemple 5 — Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante : $\quad y' + \frac{1}{t}y = t + \frac{1}{t}$.

Théorème 3 : Conditions initiales – le problème de Cauchy

Exemple 6 — Résoudre le problème de Cauchy : $\quad y' + \frac{1}{t}y = t$, sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $y(1) = 0$.

4 Application classique : une équation fonctionnelle

SF 5 : Equation fonctionnelle et équation différentielle

♥ **Exemple 7** — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant : $\forall x, t \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)f(t)$.