1 Développement limité à l'ordre 1

- **Cadre.** • U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ • $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ • $p = (a, b)$ est un point de U.

Théorème 2 : Développement limité à l'ordre 1

f admet en (a, b) le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h, b+k) \underset{(h,k)\to 0}{=} f(a,b) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}_{L(h,k)\text{ linéaire en }(h,k)} + \underbrace{o\big(\|(h,k)\|\big)}_{\text{petit terme correctif}}$$

Démonstration du théorème. Puisque U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(p, r) \subset U$.
La fonction $R : (h,k) \mapsto f(a+h, b+k) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$ est donc bien définie sur $B(0,r)$.

Montrons que : $R(h,k) \underset{(h,k)\to 0}{=} o\big(\|(h,k)\|\big)$

Soit $\varepsilon > 0$ il s'agit de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(h,k) \in B(0,\alpha)$: $|R(h,k)| \le \varepsilon\,\|(h,k)\|$.
Soit $(h,k) \in \mathscr{B}(0,r)$. L'idée est de décomposer l'accroissement $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ en deux termes où seule une des deux coordonnée varie. Précisément on écrit :

$$R(h,k) = \underbrace{f(a+h,b+k) - f(a,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h}_{R_1(h)} + \underbrace{f(a,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}_{R_2(k)}$$

où, puisque $t \mapsto f(a+t, b+k)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, r]$:

$$R_1(h) = \left(\int_0^h \frac{\partial f}{\partial x}(a+t,b+k)\,\mathrm{d}t\right) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h = \int_0^h \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a+t,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Big)\mathrm{d}t$$

Par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $p = (a,b)$, il existe $\alpha_1 > 0$, que l'on peut supposer inférieur à r, tel que

$$\forall (x,y) \in B(p,\alpha_1), \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right| \le \varepsilon$$

Si $(h,k) \in B(0,\alpha_1)$, alors $(a+t, b+k) \in B(p,\alpha_1)$ pour tout t entre 0 et h donc : $|R_1(h)|\ \varepsilon\,|h|$.
De même, par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en (a,b) il existe $\alpha_2 \in\,]0, r[$ tel que : $|R_2(k)| \le \varepsilon\,|k|$ dès que $(h,k) \in B(0,\alpha_2)$.
En posant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, ce qui précède assure que si $(h,k) \in B(0,\alpha)$:

$$|R(h,k)| \le |R_1(h)| + |R_2(k)| \le \varepsilon\,|h| + \varepsilon\,|k| \le \varepsilon\,\|(h,k)\| + \varepsilon\,\|(h,k)\| = 2\varepsilon\,\|(h,k)\|$$

- **Notion de différentielle (hors programme).** L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ appelée *différentielle de f en $p = (a,b)$* et notée $\mathrm{d}f(p)$.
Rappelons que le *gradient de f en $p = (a,b)$* est le vecteur : $\nabla f(p) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Big)$.

Par conséquent, pour tout vecteur $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$: $\boxed{\mathrm{d}f(p)(v) = (\nabla f(p) \mid v)}$.
L'application $\mathrm{d}f(p)$ est donc l'application « produit scalaire par $\nabla f(p)$ ».
Le développement limité de f en $p = (a,b)$ s'écrit : $\boxed{f(p+v) \underset{v\to 0}{=} f(p) + \mathrm{d}f(p)(v) + o(\|v\|)}$

La notion de *différentielle* est l'analogue de la notion de dérivée pour les fonctions de deux variables. Cette notion sera étudiée en deuxième année.