I Divisibilité et division euclidienne

1 Diviseurs, multiples

Définition 1

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que b *divise* a ou que a est un *multiple* de b si :

On note :

Exemple 1 — **a)** Donner l'ensemble des diviseurs de 8 **b)** Donner l'ensemble des diviseurs de 0

Exemple 2 — Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a - b$ divise $a^n - b^n$.

Exemple 3 *Entiers associés* — Montrer que si : $a \mid b$ et $b \mid a$, alors : $a = \pm b$

Théorème 1 : Combinaisons linéaires.

Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors d divise toute combinaison linéaire de a et b :

Exercice 1 — Démontrer ce résultat.

2 Congruences

Définition 2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que *a est congru à b modulo n* si :

- **Rappel.** La congruence modulo n est :

Exemple 4 *Modulo 5* — **a)** $7 \equiv \quad [5]$ **b)** $13 \equiv \quad [5]$ **c)** $4 \equiv \quad [5]$ **d)** $20 \equiv \quad [5]$

Théorème 2 : Compatibilité avec les opérations

Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $a \equiv b \; [n]$ et $a' \equiv b' \; [n]$ alors :

-
-
-

Exercice 2 — Démontrer ce théorème

SF 1 : congruences et divisibilité

n divise a si et seulement si :

Exemple 5 ♥ — Montrer que $4^{345} + 9^{434}$ est divisible par 5.

3 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que :

1.
2.

Exercice 3 — Etablir l'existence de cet unique couple par analyse-synthèse.

Exemple 6 — Effectuer la division euclidienne de : **a)** 16 par 3 **b)** 65362 par 3

SF 2 : congruences et reste

Modulo b, a est congru à un seul élément de $[\![0, b-1]\!]$:

♥

Exemple 7 SF 2 SF 3 — Trouver le reste de la division euclidienne de 2^{65362} par 7 .

Exemple 8 SF 2 SF 3 — $4^{345} + 9^{434}$ est-il divisible par 7 ?

Exemple 9 *Tableau de congruence* — Soit $n \in \mathbb{Z}$, impair. Montrer : $n^2 \equiv 1 \; [8]$.

Exemple 10 *Tableau de congruence (bis)* — Montrer que l'équation $x^2 - 3y^2 = 17$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.