I Divisibilité et division euclidienne

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients (nulle à partir d'un certain rang).

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul : $\deg P \underset{\text{déf.}}{=}$
- $\deg P = d$ signifie :

- **Vocabulaire.** • a_d est le *coefficient dominant* de P • P est *unitaire* si $a_d = 1$
- **Remarques:** 1. Par convention : 2. P s'écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi :

Définition 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=}$

Exemple 1 — **a)** $\mathbb{K}_0[X] =$ **b)** $\mathbb{K}_2[X] =$

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls. • •

- **Remarque.** Si $\deg P > \deg Q$ alors : $\deg(P+Q) = \deg P$

Exercice 1 — Démontrer les deux points du théorème.

- **Remarque.** Les formules sont encore vraies si $P = 0$ ou $Q = 0$ avec les conventions $-\infty \leq n$ et $-\infty + n = -\infty$

Théorème 2 : $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$ alors :

Exercice 2 — Démontrer ce théorème.

Exercice 3 *Inversibles de $\mathbb{K}[X]$* ♥ — Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme :

Exercice 4 — $P = X^3 + X + 1$, $Q = X^2 - 1$, calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

- **Remarque.** De façon générale, si le polynôme Q n'est pas constant : $\deg(P \circ Q) =$

Exemple 2 SF 1 — Trouver tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^3) = X^2 P(X)$.

3 Diviseurs, multiples

Définition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est un multiple de B si :

Exemple 3 — Justifier que : **a)** $X^2 \mid X^6 + 4X^4 + 3X^2$. **b)** $X - 5 \mid X^2 - 6X + 5$. **c)** $X - 1 \mid X^n - 1$.

Exercice 5 *Polynômes associés* ♥ — Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Etablir : $A \mid B$ et $B \mid A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid A = \lambda B$

4 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. 2.

Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple 4 *et méthode* — Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 - 5X^3 - X^2 + 6X - 4$ par $B = X^2 - 2$.

Exercice 6 — Etablir l'unicité puis l'existence de ce couple de polynômes.